

# Agradecimentos

Agradeço à minha orientadora, Professora Doutora Maria Joana Soares, toda a orientação científica e todo o *extraordinário* apoio e amizade que me dedicou ao longo deste tempo, tendo ultrapassado em grande medida o seu papel de orientadora, à custa do seu empenho pessoal, tornando-se um modelo para mim.

Aos meus pais, o meu muito obrigado pelo incondicional apoio e compreensão.

# Uso de ôndulas na compressão de operadores

## Resumo

A chamada “teoria das ôndulas” constitui uma área recente e muito activa da matemática, que tem vindo a ser utilizada com sucesso em diversos campos de investigação, tal como reconhecimento de padrões, análise de sinal, compressão de dados, física quântica, acústica, etc., abrangendo, portanto, áreas desde a matemática pura e aplicada até à física, computação e engenharia .

Uma questão importante nesta teoria é a aplicação de um operador, representado numa certa base de ôndulas (escolhida adequadamente), a uma função arbitrária. A representação do operador pode fazer-se de duas formas distintas: *standard* e *não-standard*.

O principal objectivo desta tese é o estudo e descrição pormenorizada das representações *standard* e *não-standard* de operadores em bases de ôndulas. Mostraremos, em particular, como estas representações podem ser usadas na compressão de certas classes de operadores.

Serão construídas explicitamente as representações de alguns casos particulares de operadores e calculadas, numericamente, as respectivas taxas de compressão.

Finalmente, serão referidas algumas aplicações dessas representações.

# Using wavelets for operator compression

## Abstract

Wavelet theory constitutes a recent and very active area of mathematics which has been used successfully in several fields of research, such as, pattern recognition, analysis, data compression, quantum physics and acoustics, etc., embracing, therefore, areas from pure and applied mathematics to physics, computation and engineering.

An important question in this theory is the application of an operator, represented in a certain wavelet basis (adequately chosen), to an arbitrary function. The representation of the operator can be done in two distinct forms: *standard* and *non-standard*.

The main purpose of this thesis is the study and detailed description of the *standard* and *non-standard* representations of operators. We will show, in particular, how these representations can be used to compress certain classes of operators.

The representation of some particular examples of operators will be explicitly constructed and the respective compression rates will be numerically computed.

Finally, some applications of these representations will be reported.

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Resultados Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1 Espaços $L^p$ . . . . .	4
1.2 Bases ortonormadas . . . . .	6
1.3 Série de Fourier . . . . .	8
1.4 Transformada de Fourier . . . . .	8
1.5 Operadores de projecção . . . . .	12
<b>2 Resultados Básicos sobre Ôndulas</b>	<b>14</b>
2.1 Ôndulas ortogonais . . . . .	14
2.2 Análise multi-resolução (AMR) . . . . .	15
2.2.1 Definição de AMR . . . . .	15
2.2.2 Consequências da definição de AMR . . . . .	17
2.2.3 Espaços de detalhe . . . . .	21
2.2.4 Ôndula ortogonal associada a uma AMR . . . . .	24
2.3 Ôndulas de Daubechies . . . . .	26
2.4 Transformadas rápidas com ôndulas . . . . .	32
2.4.1 Transformada rápida directa . . . . .	32
2.4.2 Transformada rápida inversa . . . . .	34
2.4.3 Inicialização do processo de transformada rápida . . . . .	36
2.5 Periodização . . . . .	38

<b>3</b>	<b>Representação de Operadores Usando Ôndulas</b>	<b>48</b>
3.1	Forma não-standard . . . . .	48
3.1.1	Representação de operadores em $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	48
3.1.2	Determinação de $Tf$ . . . . .	53
3.1.3	Operadores em $L^2([0, 1])$ e periodização . . . . .	54
3.1.4	Inicialização da construção da forma não-standard . . . . .	56
3.2	Forma standard . . . . .	56
3.2.1	Representação matricial . . . . .	57
3.2.2	Construção a partir da forma não-standard . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Forma Não-standard de Operadores Diferenciais</b>	<b>63</b>
4.1	Matriz inicial para o operador $\frac{d}{dx}$ . . . . .	63
4.2	Exemplos . . . . .	78
4.3	Operador $\frac{d^n}{dx^n}$ . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Compressão de Operadores</b>	<b>83</b>
5.1	Operadores de Calderón-Zygmund . . . . .	84
5.2	Operadores em $L^2([0, 1])$ . . . . .	87
5.3	Compressão da matriz não-standard . . . . .	90
5.4	Breve referência à compressão da forma standard . . . . .	95
<b>6</b>	<b>Resultados Numéricos</b>	<b>97</b>
<b>7</b>	<b>Algumas Conclusões e Trabalho Futuro</b>	<b>116</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>119</b>
<b>A</b>	<b>Rotinas em MATLAB</b>	<b>127</b>

# Lista de Tabelas

6.1	Resultados do Exemplo 6.1 ( $M = 6$ , $\epsilon = 10^{-7}$ ) . . . . .	100
6.2	Resultados do Exemplo 6.1 ( $M = 2$ , $\epsilon = 10^{-7}$ ) . . . . .	101
6.3	Resultados do Exemplo 6.2 ( $M = 6$ , $\epsilon = 10^{-7}$ ) . . . . .	102
6.4	Resultados do Exemplo 6.3 ( $M = 4$ , $\epsilon = 10^{-7}$ ) . . . . .	103
6.5	Resultados do Exemplo 6.4 ( $M = 2$ , $\epsilon = 10^{-3}$ ) . . . . .	104
6.6	Resultados do Exemplo 6.5 ( $M = 2$ , $\epsilon = 10^{-3}$ ) . . . . .	104
6.7	Resultados do Exemplo 6.6 ( $M = 6$ , $\epsilon = 10^{-7}$ ) . . . . .	105

# Lista de Figuras

2.1	Esquema da transformada rápida directa . . . . .	34
2.2	Esquema da transformada rápida inversa . . . . .	36
3.1	Representação matricial da forma não-standard de $T$ . . . . .	52
3.2	Obtenção da forma não-standard de $\mathbf{s}^{-n}$ . . . . .	53
3.3	Determinação de $\widehat{\mathbf{s}}^{-n}$ . . . . .	54
3.4	Representação matricial na forma standard de $T_{-3}$ . . . . .	59
3.5	Esquema de cálculo da linha $k$ das matrizes $\mathcal{B}_j^l$ . . . . .	60
4.1	Exemplo – forma não-standard ( $N = 256, M = 5$ ) . . . . .	80
6.1	Exemplo 6.1 – forma não-standard ( $N = 256, M = 6, \epsilon = 10^{-7}$ ) . . . . .	106
6.2	Exemplo 6.1 – forma standard ( $N = 256, M = 6, \epsilon = 10^{-7}$ ) . . . . .	107
6.3	Exemplo 6.2 – forma não-standard ( $N = 256, M = 6, \epsilon = 10^{-7}$ ) . . . . .	108
6.4	Exemplo 6.2 – forma standard ( $N = 256, M = 6, \epsilon = 10^{-7}$ ) . . . . .	109
6.5	Exemplo 6.2 com singularidades em $x = 1/4$ e $y = 1/4$ – forma não-standard ( $N = 256, M = 6, \epsilon = 10^{-7}$ ) . . . . .	110
6.6	Exemplo 6.2 com singularidades em $x = 1/4$ e $y = 1/4$ – forma standard ( $N = 256, M = 6, \epsilon = 10^{-7}$ ) . . . . .	111
6.7	Exemplo 6.3 – forma não-standard ( $N = 256, M = 4, \epsilon = 10^{-6}$ ) . . . . .	112
6.8	Exemplo 6.3 – forma standard ( $N = 256, M = 4, \epsilon = 10^{-6}$ ) . . . . .	113
6.9	Exemplo 6.6 – forma não-standard ( $N = 256, M = 6, \epsilon = 10^{-7}$ ) . . . . .	114
6.10	Exemplo 6.6 – forma standard ( $N = 256, M = 6, \epsilon = 10^{-7}$ ) . . . . .	115

# Introdução

O estudo das ôndulas – funções que devem o seu nome ao facto de possuírem duas características especiais: por um lado, serem oscilatórias (ondas) e por outro serem bem localizadas (pequenas) – tem sido realizado e aplicado com sucesso em diversas áreas de investigação, desde a matemática pura e aplicada, até à física, computação e engenharia.

O rápido desenvolvimento do seu estudo deu-se na segunda metade dos anos 1980 com esforços partilhados de investigadores das mais diversas áreas. Em [Dau96], Ingrid Daubechies, um dos grandes nomes ligados ao desenvolvimento desta teoria, descreve sumariamente a evolução das ôndulas, referindo que elas são um exemplo onde “ideias de muitos campos diferentes se combinam e se fundem num todo que é maior que a soma das partes”.

A noção de ôndula foi introduzida pelo geofísico francês Jean Morlet no início da década de 1980, como um instrumento para análise de sinal de dados sísmicos. Os bons resultados numéricos obtidos por Morlet levaram o físico teórico Alex Grossmann a interessar-se por estas funções, uma vez que reconheceu algo parecido com as técnicas que utilizava na área da mecânica quântica. É em 1985 que Yves Meyer, inspirado em alguns resultados anteriores, começa efectivamente o desenvolvimento da “decomposição com ôndulas”. No entanto, as ôndulas de Meyer não têm suporte compacto, sendo só com Ingrid Daubechies que serão introduzidas as ôndulas ortogonais de suporte compacto, constituindo esta descoberta uma das mais importantes contribuições para o crescimento da área de análise das ôndulas. Também



Stéphane Mallat impulsionou a aplicação e estudo das ôndulas através do seu trabalho em processamento de sinal. Nos últimos anos, muitos investigadores têm vindo não só a construir fundamentos matemáticos para análise das ôndulas, mas também a promover este campo como uma área interdisciplinar de pesquisa. O grande sucesso da utilização das ôndulas advém da interligação entre os seus sólidos fundamentos matemáticos e as suas aplicações muito variadas.

Numa fase anterior à *revolução das ôndulas*, alguns algoritmos já expressavam de uma forma implícita muitos dos conceitos e técnicas existentes nesta teoria, vindo esta, de certa forma, unificar todos esses algoritmos numa linguagem coerente e estruturada.

Uma aplicação importante desta teoria é a chamada compressão de operadores. Para certas classes de operadores, a sua representação usando ôndulas, quer na chamada forma *standard*, mas especialmente na forma dita *não-standard*, introduzida por Beylkin, Coifman e Rokhlin [BCR91], conduz a matrizes esparsas, possibilitando que o cálculo do operador, que tipicamente envolve um número de operações de  $\mathcal{O}(N^2)$  ( $N$  a dimensão do espaço de discretização inicial do operador) seja feita através de  $\mathcal{O}(N \log N)$  ou mesmo  $\mathcal{O}(N)$  operações.

O principal objectivo desta tese é precisamente o estudo e descrição pormenorizada das representações *standard* e *não-standard* de operadores em bases de ôndulas e da sua capacidade de compressão.

Esta dissertação inicia-se com um primeiro capítulo no qual são apresentados alguns conceitos e notações necessários ao desenvolvimento do restante trabalho. No Capítulo 2, introduzimos noções básicas sobre ôndulas, entre as quais, o conceito de ôndula ortogonal, de análise multi-resolução, bem como a relação entre estes. Teremos particular interesse nas ôndulas de Daubechies, introduzidas em [Dau88], as quais revelam ser detentoras de

propriedades bastante convenientes em aplicações: ortogonalidade, suporte compacto, certo número de momentos nulos.

No Capítulo 3, descrevemos com pormenor como podem ser construídas e utilizadas as já referidas formas *não-standard* e *standard* de operadores em bases de ôndulas.

No Capítulo 4, são apresentados alguns resultados específicos para operadores diferenciais, em especial o operador  $d/dx$ , e no capítulo seguinte alguns resultados importantes relativos aos operadores de Calderón-Zygmund e a forma de os comprimir.

No Capítulo 6, são apresentados resultados numéricos, obtidos com um programa implementado em *Matlab*, destinados a ilustrar resultados teóricos dos capítulos precedentes.

Finalmente, no Capítulo 7, são retiradas algumas conclusões finais.

A implementação em *Matlab* dos algoritmos utilizados para a obtenção dos resultados numéricos é apresentada no Apêndice A.

# Capítulo 1

## Resultados Preliminares

Neste capítulo inicial são apresentadas algumas notações e resultados básicos que serão utilizados ou referenciados ao longo da dissertação. Por se tratar de um capítulo contendo resultados clássicos, aqui apresentados apenas para que possam servir de rápida referência, não são incluídas quaisquer demonstrações; como referências básicas para este capítulo, indicamos os livros de [Rud74], [DM72] e [Kre78].

### 1.1 Espaços $L^p$

Se  $X$  é um subconjunto mensurável da recta real  $\mathbb{R}$ , em particular o próprio  $\mathbb{R}$ , denotamos por  $L^p(X)$  ( $0 < p < \infty$ ) o espaço de Banach das (classes de equivalência de) funções mensuráveis  $f$  definidas em  $X$  tais que

$$\|f\|_p := \left( \int_X |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty. \quad (1.1)$$

- No caso especialmente importante em que  $p = 2$ , o espaço em causa é um espaço de Hilbert relativamente ao produto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_X f(x) \overline{g(x)} dx, \quad (1.2)$$

onde  $\bar{u}$  denota o conjugado de  $u$ .

**Nota 1.1** Por ser este o caso com que trabalharemos com maior frequência, por vezes usaremos apenas  $\|\cdot\|$  para denotar a norma  $\|\cdot\|_2$ , isto é, será

$$\|f\| := \|f\|_2 = \left( \int_X |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \langle f, f \rangle^{1/2}. \quad (1.3)$$

• Quando  $X$  é um intervalo  $X = [a, a + \Omega]$  de amplitude  $\Omega$ ,  $\Omega > 0$ , podemos identificar o espaço  $L^p(X) = L^p([a, a + \Omega])$  com o espaço das funções periódicas de período  $\Omega^1$  e que satisfazem

$$\int_a^{a+\Omega} |f(x)|^p dx < \infty.$$

Neste caso, é mais conveniente normalizar o produto interno (1.2) do seguinte modo

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_a^{a+\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (1.4)$$

A norma  $\|\cdot\|_p$  será também redefinida como

$$\|f\|_p := \left( \frac{1}{\Omega} \int_a^{a+\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (1.5)$$

• Quando  $X$  é o conjunto discreto  $\mathbb{Z}$ , as funções definidas em  $X$  serão simplesmente sequências bi-infinitas  $f = (f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ .<sup>2</sup> Neste caso, os integrais em (1.1) e (1.2) devem ser interpretados relativamente à medida discreta, isto é, a norma e produto interno são definidos, respectivamente, por

$$\|f\|_p := \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f_k|^p \right)^{1/p} \quad (1.6)$$

e

$$\langle f, g \rangle := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \overline{g_k} \quad (1.7)$$

Estes espaços são referidos como *espaços das sequências  $p$ -somáveis* e denotados por  $\ell^p(\mathbb{Z})$ .

---

<sup>1</sup>Isto é, funções que satisfazem  $f(x + k\Omega) = f(x)$ , para todo o  $k \in \mathbb{Z}$  e para quase todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

<sup>2</sup>Consideramos aqui sequências bi-infinitas, isto é, conjuntos indexados pelo conjunto  $\mathbb{Z}$ , por ser este o tipo de sequências que usaremos mais frequentemente neste texto. As definições aqui apresentadas adaptam-se facilmente para outras “sequências” indexadas por um qualquer conjunto de índices  $I$ , por exemplo  $I = \mathbb{N}, \mathbb{Z}^2$ , etc.

## 1.2 Bases ortonormadas

No que se segue,  $H$  designa um espaço de Hilbert com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e respectiva norma associada,  $\|h\| = \langle h, h \rangle^{1/2}$ .

**Definição 1.1 (Base de Schauder)** *Uma sequência de vectores  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  em  $H$  diz-se uma base de Schauder de  $H$  se, para cada vector  $h \in H$ , existe uma única sequência de escalares  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (c_k(h))_{k \in \mathbb{Z}}$ , tal que:*

$$h = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k h_k \quad (1.8)$$

A igualdade (1.8) deve ser interpretada com o seguinte significado:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| h - \sum_{k=-n}^n c_k h_k \right\| = 0. \quad (1.9)$$

De aqui em diante, quando nos referimos a uma base de um espaço de Hilbert, será sempre no sentido de base de Schauder. É imediato concluir que uma base é sempre constituída por vectores linearmente independentes.

**Definição 1.2** *Seja  $\emptyset \neq M \subset H$ . Chama-se espaço gerado por  $M$ , e denota-se por  $\langle M \rangle$ , ao conjunto de todas as combinações lineares finitas de elementos de  $M$ .*

**Definição 1.3 (Sequência completa)** *Uma sequência de vectores  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  num espaço de Hilbert  $H$  diz-se completa (total, fundamental, fechada) se o conjunto  $\langle \{h_k\} \rangle$  for denso em  $H$ , isto é, se o seu fecho  $\overline{\langle \{h_k\} \rangle}$  coincidir com  $H$ ; por outras palavras, para cada vector  $h \in H$  e para cada  $\epsilon > 0$ , existirá uma combinação linear finita de vectores  $h_k$ ,  $\alpha_{k_1} h_{k_1} + \alpha_{k_2} h_{k_2} + \dots + \alpha_{k_n} h_{k_n}$ , tal que*

$$\|h - (\alpha_{k_1} h_{k_1} + \alpha_{k_2} h_{k_2} + \dots + \alpha_{k_n} h_{k_n})\| < \epsilon. \quad (1.10)$$

Note-se que se  $(h_k)$  é uma base, então  $(h_k)$  é completa.

De entre as diversas bases de um espaço de Hilbert, têm particular importância as chamadas bases ortonormadas, que passamos a caracterizar.

**Definição 1.4** *Um sequência  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  de vectores de um espaço de Hilbert  $H$  diz-se ortonormada se verificar*

$$\langle h_i, h_j \rangle = \delta_{i,j}, \quad \forall i, j \in \mathbb{Z}. \quad (1.11)$$

*Uma sequência de vectores que seja ortonormada e forme uma base de  $H$  será referida como uma base ortonormada de  $H$ .*

Tem-se o seguinte teorema.

**Teorema 1.1** *Seja  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  uma sequência ortonormada de um espaço de Hilbert  $H$ . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i)  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  é completa;

(ii)

$$\forall h \in H, \quad h = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle h, h_k \rangle h_k; \quad (1.12)$$

(iii)

$$\forall h \in H, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle h, h_k \rangle|^2 = \|h\|^2; \quad (1.13)$$

(iv)

$$\forall g, h \in H, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle g, h_k \rangle \overline{\langle h, h_k \rangle} = \langle g, h \rangle; \quad (1.14)$$

(v)  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  é uma base ortonormada de  $H$ .

A identidade (1.13) mostra, em particular, que a sequência  $(c_k) := (\langle h, h_k \rangle)$  dos coeficientes da expansão de  $h$  na base ortonormada  $(h_k)$  é uma sequência do espaço  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Reciprocamente, pode provar-se que, dada uma qualquer sequência  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , a série  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k h_k$  converge (na norma de  $H$ ) para um elemento  $g \in H$ , sendo os coeficientes de  $g$  na base  $(h_k)$  precisamente os coeficientes  $c_k$ , isto é,  $\langle g, h_k \rangle = c_k$ .

## 1.3 Série de Fourier

No espaço  $L^2([0, \Omega])$  das funções periódicas de período  $\Omega$  de quadrado somável, existe uma base ortonormada especialmente importante: trata-se da base formada pelas funções da forma

$$e_k(x) := e^{ik\frac{2\pi}{\Omega}x}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, de acordo com o Teorema 1.1, toda a função de  $L^2([0, \Omega])$  admite uma expansão da forma

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\frac{2\pi}{\Omega}x} \quad (1.15)$$

onde os coeficientes  $c_k = c_k(f)$  são dados por

$$c_k = \left\langle f, e^{ik\frac{2\pi}{\Omega}x} \right\rangle = \frac{1}{\Omega} \int_0^\Omega f(x) e^{-ik\frac{2\pi}{\Omega}x} dx. \quad (1.16)$$

A expansão (1.15) é conhecida como *expansão em série de Fourier de  $f$* , sendo os coeficientes  $c_k$  dados por (1.16) designados por *coeficientes de Fourier de  $f$* .

## 1.4 Transformada de Fourier

Dada uma função  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , denotamos por  $\widehat{f}$  ou  $\mathcal{F}f$  a sua transformada de Fourier, definida por

$$\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \quad (1.17)$$

**Nota 1.2** A fórmula (1.17) deve ser entendida com o significado

$$\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(x) e^{-i\xi x} dx,$$

onde o limite anterior é tomado no sentido da convergência em  $L^2(\mathbb{R})$ , isto é,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \iff \|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Pode mostrar-se que a transformada de Fourier é um operador unitário de  $L^2(\mathbb{R})$  em  $L^2(\mathbb{R})$ , sendo válida a seguinte fórmula importante, conhecida como fórmula de Parseval:

$$\langle f, g \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}). \quad (1.18)$$

Uma outra propriedade importante da transformada de Fourier, que relaciona a derivação com a multiplicação por monômios, é a seguinte:

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (-i)^k \widehat{x^k f}(\xi). \quad (1.19)$$

Neste trabalho, usaremos com muita frequência três operadores, conhecidos por *dilatação*, *translação* e *modulação*, que passamos a definir.

### Definição 1.5

- Dado  $a \in \mathbb{R}$ , chama-se *operador de translação por  $a$* , e denota-se por  $T_a$ , o operador de  $L^2(\mathbb{R})$  em  $L^2(\mathbb{R})$  definido por

$$T_a f(x) := f(x - a) \quad (1.20)$$

- Dado  $a \in \mathbb{R}$ , chama-se *operador de modulação por  $a$* , e denota-se por  $E_a$ , o operador de  $L^2(\mathbb{R})$  em  $L^2(\mathbb{R})$  definido por

$$E_a f(x) := e^{iax} f(x) \quad (1.21)$$

- Dado  $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ , chama-se *operador de dilatação por  $a$* , e denota-se por  $D_a$ , o operador de  $L^2(\mathbb{R})$  em  $L^2(\mathbb{R})$  definido por

$$D_a f(x) := |a|^{-1/2} f(x/a). \quad (1.22)$$

Os operadores acima definidos são, todos eles, operadores unitários. O teorema seguinte estabelece o comportamento destes operadores face à transformada de Fourier.



**Teorema 1.2** *Seja  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Então, tem-se*

$$\widehat{T_a f} = E_{-a} \widehat{f}, \quad \widehat{E_a f} = T_a \widehat{f}, \quad \widehat{D_a f} = D_{1/a} \widehat{f}. \quad (1.23)$$

Um outro resultado importante que iremos utilizar com frequência é a chamada *Fórmula da Soma de Poisson*; esta fórmula estabelece uma relação entre os coeficientes de uma função obtida por *periodização* de uma dada função  $f$  e a transformada de Fourier de  $f$ . A este propósito, começamos por introduzir a seguinte definição.

**Definição 1.6** *Seja  $f \in L^2(\mathbb{R})$  e seja  $\Omega > 0$ . Chama-se *periodização* de  $f$  com período  $\Omega$ , e denota-se por  $\widetilde{f}_\Omega$ , a função definida por*

$$\widetilde{f}_\Omega(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + k\Omega). \quad (1.24)$$

Naturalmente, para que a definição anterior faça sentido, a função  $f$  deverá ter um decaimento suficientemente rápido (e.g.,  $f(x) = \mathcal{O}(|x|^{-1-\epsilon})$ ,  $\epsilon > 0$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ ), o que assumimos tacitamente. Na realidade, iremos geralmente trabalhar com funções que verificam trivialmente a condição de decaimento referida, uma vez que têm suporte compacto. Relembre-se que, dada uma função contínua  $f$ , se chama *suporte de  $f$* , e se designa por  $\text{supp } f$ , ao conjunto

$$\text{supp } f := \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}. \quad (1.25)$$

Uma função diz-se de suporte compacto se o seu suporte estiver contido num certo intervalo  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ .<sup>3</sup>

**Nota 1.3** De referir que, se  $f$  tiver suporte num intervalo  $I$  de amplitude não superior a  $\Omega$ , então  $\widetilde{f}_\Omega$  será a simples “repetição” de uma forma periódica

---

<sup>3</sup>Para uma função  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , a noção usual de suporte tem de ser modificada, uma vez que estas funções estão apenas definidas para q.t.p. Neste caso, considera-se a família de todos os abertos  $(\Omega_i)_{i \in I}$  tais que, para cada  $i \in I$ ,  $f = 0$  (q.t.p.) em  $\Omega_i$ . Sendo  $\Omega = \cup_i \Omega_i$ , define-se  $\text{supp } f = \mathbb{R} \setminus \Omega$ . Se  $f$  é contínua, esta definição coincide com a definição usual.

de  $f|_I$ , havendo, para cada  $x$ , apenas um termo não nulo no somatório (1.24).

Por exemplo, se  $\text{supp} f \subset [0, 1]$ , então

$$\tilde{f}_1(x) = f(x - \lfloor x \rfloor), \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Teorema 1.3 (Fórmula da Soma de Poisson)** *Seja  $f \in L^2(\mathbb{R})$  de decaimento suficientemente rápido (e.g.,  $f(x) = \mathcal{O}(|x|^{-1-\epsilon})$ ,  $\epsilon > 0$ ) e seja  $\tilde{f}_\Omega$  a periodização de período  $\Omega > 0$  de  $f$  dada por (1.24). Então,  $\tilde{f}_\Omega$  é uma função periódica de período  $\Omega$  e os seus coeficientes de Fourier  $c_k = c_k(\tilde{f}_\Omega)$  são dados por*

$$c_k(\tilde{f}_\Omega) = \frac{1}{\Omega} \hat{f}\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right). \quad (1.26)$$

*Se a transformada de Fourier satisfizer também uma condição de decaimento do tipo  $\hat{f}(\xi) = \mathcal{O}(|\xi|^{-1-\epsilon})$ , tem-se a seguinte igualdade, válida para todo o  $x \in \mathbb{R}$ :*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + k\Omega) = \frac{1}{\Omega} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right) e^{i\pi \frac{2k\pi}{\Omega} x}. \quad (1.27)$$

Terminamos esta secção com um teorema contendo resultados que expressam a ortogonalidade de um conjunto de funções obtidas por translações inteiras de uma dada função, em termos de transformadas de Fourier.

**Teorema 1.4** *Seja  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $\{f(x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  é um conjunto ortonormado;
- (ii)  $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 e^{-ij\xi} d\xi = \delta_{j,0}$ ;
- (iii)  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1$  (para q.t.  $\xi$ ).

## 1.5 Operadores de projecção

Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e  $Y$  um seu qualquer subconjunto. Define-se *complemento ortogonal de  $Y$* , denotado por  $Y^\perp$ , como o conjunto

$$Y^\perp = \{h \in H : \langle h, y \rangle = 0, \forall y \in Y\}.$$

Seja  $S$  um subespaço fechado de  $H$  e seja  $S^\perp$  o seu complemento ortogonal. Pode provar-se que todo o elemento de  $H$  se escreve, de modo único, como soma de um elemento de  $S$  com um elemento do seu complemento ortogonal, isto é,

$$\forall h \in H, \quad h = s + s^\perp, \quad (1.28)$$

onde  $s \in S$  e  $s^\perp \in S^\perp$  são determinados de modo único.

Usaremos aqui o símbolo  $\overset{\perp}{\oplus}$  para designar soma ortogonal, isto é,  $X = A \overset{\perp}{\oplus} B$  significará que  $X$  é a soma directa de  $A$  e  $B$  ( $X = A \oplus B$ ), ou seja, todo elemento de  $X$  se decompõe, de modo único, como soma de um elemento de  $A$  com um elemento de  $B$  e, além disso,  $A$  e  $B$  são ortogonais ( $A \perp B$ ), isto é,  $\langle a, b \rangle = 0$  para quaisquer elementos  $a \in A, b \in B$ . Com esta notação, escrevemos então

$$H = S \overset{\perp}{\oplus} S^\perp,$$

para qualquer subespaço fechado  $S$  de  $H$ . Dado  $h \in H$ , o único elemento  $s \in S$  determinado por  $h$ , de acordo com (1.28), chama-se *projecção ortogonal de  $h$  no subespaço  $S$* , e denota-se por  $proj_S h$ . A aplicação

$$\begin{aligned} P_S : H &\longrightarrow S \\ h &\longrightarrow proj_S h \end{aligned}$$

é um operador linear, chamado *operador de projecção ortogonal de  $H$  sobre  $S$* .

É importante referir que, no caso de conhecermos uma base ortonormada  $(s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  para o subespaço  $S$ , então a projecção ortogonal de  $H$  em  $S$  é dada

simplesmente por

$$P_S h = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle h, s_k \rangle s_k. \quad (1.29)$$

Finalmente, obtêm-se também facilmente os resultados contidos no teorema seguinte.

**Teorema 1.5** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert e sejam  $S_1$  e  $S_2$  dois subespaços fechados de  $H$  tais que  $S_1 \subset S_2$ . Designando por  $P_1$  e  $P_2$  os operadores de projecção ortogonal de  $H$  nos subespaços  $S_1$  e  $S_2$ , respectivamente, tem-se:*

- (i)  $P_1 P_2 = P_2 P_1 = P_1$
- (ii)  $P_1 - P_2$  é o operador de projecção ortogonal de  $H$  no complemento ortogonal de  $S_1$  em  $S_2$ , isto é, em  $W_1 = S_1^\perp \cap S_2$ .

## Capítulo 2

# Resultados Básicos sobre Ôndulas

O objectivo deste capítulo é fazer uma breve revisão de alguns resultados básicos sobre ôndulas, necessários à compreensão dos capítulos seguintes. Para a escrita deste capítulo usámos, essencialmente, os livros [Dau92], [Mal98], [Koo93b] e [Woj97] e ainda os textos [Soa02].

### 2.1 Ôndulas ortogonais

O conceito de ôndula tem vindo a evoluir de forma significativa nos últimos anos, tornando-se mesmo difícil introduzir uma definição de ôndula que seja consensualmente aceite. Neste trabalho, estamos especialmente interessados nas chamadas ôndulas ortogonais, que passamos a definir.

**Definição 2.1** *Uma função  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  diz-se uma ôndula ortogonal se a família de funções*

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k); \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

*constituem uma base ortonormada do espaço  $L^2(\mathbb{R})$ .*

Usando os operadores de dilatação e translação definidos por (1.20) e (1.22), vemos que qualquer um dos elementos dessa família de funções se

pode escrever como

$$\psi_{j,k} = T_{2^j k} D_{2^j} \psi, \quad (2.2)$$

ou seja, se obtém da ôndula básica  $\psi$  por simples dilatações e translações diádicas. É por esta razão que a ôndula  $\psi$  é frequentemente referida como “ôndula mãe”.

De notar ainda que, se  $\psi$  é uma ôndula ortogonal, então, tendo em conta (1.12), podemos concluir que qualquer elemento  $f$  de  $L^2(\mathbb{R})$  pode ser escrito como

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}, \quad (2.3)$$

onde

$$d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle. \quad (2.4)$$

## 2.2 Análise multi-resolução (AMR)

### 2.2.1 Definição de AMR

A construção de ôndulas ortogonais está relacionada com a noção de análise multi-resolução, introduzida por Meyer e Mallat [Mal89]. A ideia central é considerar aproximações sucessivas para uma função  $f$ , as quais correspondem a diferentes *níveis de resolução*, e determinar o que é necessário adicionar para se passar de um determinado nível de resolução para o nível seguinte.

**Definição 2.2** *Uma análise multi-resolução  $\{V_j, \varphi\}$  de  $L^2(\mathbb{R})$  consiste numa sequência  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de subespaços fechados de  $L^2(\mathbb{R})$  e numa função  $\varphi$  associada, chamada função escala, satisfazendo as seguintes propriedades:*

$$(AMR1) \quad V_j \subset V_{j-1}, \forall j \in \mathbb{Z}$$

$$(AMR2) \quad \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$$

$$(AMR3) \quad \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$$

(AMR4)  $v(x) \in V_j \Leftrightarrow v(2x) \in V_{j-1}, \forall j \in \mathbb{Z}$

(AMR5) *As translações inteiras de  $\varphi$  formam uma base ortonormada do espaço  $V_0$ , isto é,  $\{\varphi(x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$  é uma base ortonormada de  $V_0$ .*<sup>1</sup>

Na prática, pretende-se que a função escala da AMR possua determinadas propriedades, nomeadamente de decaimento e suavidade. A este propósito introduzimos a seguinte definição:

**Definição 2.3** *Uma função  $g \in L^2(\mathbb{R})$  diz-se  $r$ -regular ( $r \in \mathbb{N}_0$ ), se satisfizer:*

- (i)  $g \in C^{r-1}$
- (ii) *a derivada de ordem  $r$  de  $g$  existe (q.s.)*
- (iii) *para todo o  $k$  tal que  $0 \leq k \leq r$  e para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se que*

$$|g^{(k)}(x)| \leq C(1+|x|)^{-n},$$

*onde  $C = C(k, n)$ . Uma AMR  $\{V_j, \varphi\}$  diz-se  $r$ -regular se a função escala  $\varphi$  for  $r$ -regular.*

No que se segue, sempre que se fizer referência a uma análise multi-resolução, assume-se que esta é, pelo menos, 0-regular. Desta forma tem-se, da definição anterior, que  $\varphi$  deverá satisfazer a seguinte condição (não muito restritiva)

$$|\varphi(x)| \leq C(1+|x|)^{-n}. \quad (2.5)$$

Se  $\varphi$  for uma função de  $L^2(\mathbb{R})$  e regular, de (2.5) tem-se que  $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ , pelo que  $\widehat{\varphi}$  é uma função contínua. Na prática estaremos especialmente interessados em trabalhar com funções escala de suporte compacto, as quais verificam trivialmente a condição (2.5).

---

<sup>1</sup>Esta é a definição utilizada neste trabalho, uma vez que nele todas as construções só utilizam bases ortonormadas. Note-se no entanto que (AMR5) é, por vezes, substituída pela condição menos exigente de  $\{\varphi(x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$  ser uma base de *Riesz* de  $V_0$ .

### 2.2.2 Consequências da definição de AMR

Pode mostrar-se que uma das condições que a função escala tem de verificar de forma a que os espaços  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  formem uma análise multi-resolução regular de  $L^2(\mathbb{R})$ , especificamente, para que seja garantida a propriedade (AMR3), é que

$$|\widehat{\varphi}(0)| = 1;$$

veja, e.g. [Dau92, Remark 4., p.144] ou [Mal98, p.230].

No que se segue, assumimos sempre que a função escala  $\varphi$  é tal que

$$\widehat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1. \quad (2.6)$$

Pelas propriedades (AMR4) e (AMR5) da Definição 2.2, podemos concluir que, para cada  $j \in \mathbb{Z}$ , as funções

$$\varphi_{j,k}(x) := 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}x - k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.7)$$

formam uma base ortonormada do espaço  $V_j$ . Em particular, tem-se que  $\{\varphi_{-1,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  é uma base ortonormada de  $V_{-1}$ ; assim sendo,  $\varphi$  admitirá uma expansão em termos dessa base, uma vez que  $\varphi \in V_0$  e  $V_0 \subset V_{-1}$ . Temos, então, que

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi_{-1,k}(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2x - k), \quad (2.8)$$

onde

$$h_k = \langle \varphi, \varphi_{-1,k} \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \overline{\varphi(2x - k)} dx. \quad (2.9)$$

**Nota 2.1** Se  $\varphi$  for uma função real, ter-se-á simplesmente

$$h_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \varphi(2x - k) dx,$$

sendo  $h_k$  reais.

Neste trabalho, as ôndulas com que trabalhamos correspondem sempre a funções escala reais, pelo que, de agora em diante omitiremos o símbolo de conjugado.



A equação (2.8) chama-se *equação de dupla escala* (ou *equação de dilatação* ou *refinamento*) para a função escala  $\varphi$  e a sequência  $\mathbf{h} = (h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  é chamada *filtro* da função escala  $\varphi$ .

Usando os operadores de dilatação e translação introduzidos anteriormente, tem-se que a equação (2.8) pode ser escrita como

$$\varphi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k T_{k/2} D_{1/2} \varphi.$$

Aplicando agora a transformada de Fourier a ambos os membros da equação e tendo em contas os resultados do Teorema 1.2, vem

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(\xi) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \widehat{T_{k/2} D_{1/2} \varphi}(\xi) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k E_{-k/2} D_2 \widehat{\varphi}(\xi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\xi/2} \widehat{\varphi}(\xi/2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Podemos dizer, então, que

$$\widehat{\varphi}(\xi) = H(\xi/2) \widehat{\varphi}(\xi/2), \quad (2.11)$$

onde

$$H(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\xi}. \quad (2.12)$$

A função periódica de período  $2\pi$  dada por (2.12) é denominada por *função de transferência* do filtro  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ , por vezes também referida como função de transferência da função escala  $\varphi$  ou da AMR considerada.

**Nota 2.2** Pode mostrar-se que, sendo  $\varphi$  regular, os coeficientes  $h_k$  satisfazem a seguinte condição:

$$|h_k| \leq C_m (1 + |k|)^{-m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Esta propriedade de decaimento dos coeficientes  $h_k$  implica que a função  $H(\xi)$  está definida para todo o  $\xi \in \mathbb{R}$  e é também infinitamente derivável.

Como  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$  e  $\{\varphi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  é uma base ortonormada do espaço  $V_j$ , então, de acordo com o Teorema 1.4, tem-se

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1. \quad (2.13)$$

(De notar que, devido à regularidade de  $\varphi$ , a igualdade (2.13) é válida para todo o  $\xi \in \mathbb{R}$ .)

Enunciamos de seguida um teorema contendo alguns resultados importantes sobre a função de transferência  $H(\xi)$  e respectivo filtro  $\mathbf{h} = (h_k)$ .

**Teorema 2.1** *Seja  $\{V_j, \varphi\}$  uma AMR regular, tal que  $\widehat{\varphi}(0) = 1$ , e seja  $H(\xi)$  a respectiva função de transferência. Então, tem-se*

(i)

$$|H(\xi)|^2 + |H(\xi + \pi)|^2 = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}; \quad (2.14)$$

(ii)

$$H(0) = 1 \quad e \quad H(\pi) = 0; \quad (2.15)$$

(iii)

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_k = 0; \quad (2.16)$$

(iv)

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k h_{k+2l} = \delta_{0,l}. \quad (2.17)$$

**Demonstração:**

- (i) A demonstração de (2.14) resulta facilmente de (2.13), utilizando o resultado (2.11) e a periodicidade da função  $H(\xi)$ ; para mais pormenores, veja, e.g. [Dau92, pp.132 e segs].
- (ii) Tomando  $\xi = 0$  em (2.11) e tendo em conta que  $\widehat{\varphi}(0) = 1$ , vem de imediato que  $H(0) = 1$ ; conjugando este resultado com (2.14), concluímos que terá de se ter  $H(\pi) = 0$ .

(iii) A demonstração de (2.16) segue facilmente do facto de  $H(\pi) = 0$  e da definição de  $H(\xi)$  dada por (2.12).

(iv) Para demonstrar (2.17), comecemos por notar que, de (2.12), vem

$$|H(\xi)|^2 = H(\xi) \overline{H(\xi)} = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_k h_m e^{i(m-k)\xi}$$

e

$$|H(\xi + \pi)|^2 = H(\xi + \pi) \overline{H(\xi + \pi)} = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_k h_m e^{i(m-k)\xi} (-1)^{m-k}.$$

Então, tem-se

$$|H(\xi)|^2 + |H(\xi + \pi)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_k h_m e^{i(m-k)\xi} (1 + (-1)^{m-k}).$$

Efectuando agora uma mudança de variável e troca de ordem dos somatórios, vem

$$\begin{aligned} |H(\xi)|^2 + |H(\xi + \pi)|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k h_{k+p} (1 + (-1)^p) \right) e^{ip\xi} \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k h_{k+2l} \right) e^{i2l\xi} + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k h_{k+(2l+1)} \times 0 \right) e^{i(2l+1)\xi} \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k h_{k+2l} \right) e^{i2l\xi} \end{aligned}$$

Por (2.14), tem-se, então

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k h_{k+2l} \right) e^{i2l\xi} = 1,$$

donde segue o resultado que se pretendia demonstrar. ■

O teorema seguinte apresenta também dois resultados importantes.

**Teorema 2.2** *Nas condições do teorema anterior, tem-se:*

(i)

$$\widehat{\varphi}(2k\pi) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad k \neq 0; \quad (2.18)$$

(ii)

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(x - k) = 1. \quad (2.19)$$

**Demonstração:**

(i) É uma consequência imediata de (2.13), atendendo a que  $\widehat{\varphi}(0) = 1$ .

(ii) Segue de (i), utilizando a fórmula da Soma de Poisson, em particular, (1.27), e atendendo novamente a que  $\widehat{\varphi}(0) = 1$ . ■

Recorde-se que se  $\varphi$  for uma função escala de uma AMR regular, então  $\varphi$  satisfaz a igualdade (2.11). Esta equação pode ser iterada, obtendo-se

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \prod_{k=1}^n H\left(\frac{\xi}{2^k}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^n}\right).$$

Uma vez que  $\widehat{\varphi}$  é contínua em zero e  $\widehat{\varphi}(0) = 1$ , concluímos que  $\widehat{\varphi}(\xi)$  se pode escrever-se como

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} H\left(\frac{\xi}{2^k}\right). \quad (2.20)$$

Este resultado relaciona, assim, a função escala de uma AMR com a função de transferência do respectivo filtro.

### 2.2.3 Espaços de detalhe

Já referimos que, para cada  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $\{\varphi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  é uma base ortonormada do espaço  $V_j$ . No entanto, o conjunto destas bases, ou seja, a colecção  $\{\varphi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$  não forma uma base de  $L^2(\mathbb{R})$ , uma vez que contém funções linearmente dependentes.

Considere-se, então, para cada  $j \in \mathbb{Z}$ , o espaço  $W_j$  que é o complemento ortogonal de  $V_j$  em  $V_{j-1}$ , ou seja, satisfaz as seguintes propriedades

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j \quad \text{e} \quad V_j \perp W_j, \quad (2.21)$$

onde  $\oplus$  e  $\perp$  representam, respectivamente, soma directa dos espaços e a ortogonalidade dos mesmos, o que, como já referimos, escreveremos simplesmente como

$$V_{j-1} = V_j \overset{\perp}{\oplus} W_j; \quad (2.22)$$

veja, a este propósito a Secção 1.5.

O teorema seguinte estabelece algumas propriedades dos espaços  $W_j$ .

**Teorema 2.3** *Seja  $\{V_j, \varphi\}$  uma AMR regular e seja  $W_j$  o complemento ortogonal de  $V_j$  em  $V_{j-1}$ . Então,*

(i)

$$W_j \perp W_k, \text{ para } j \neq k;$$

(ii)

$$L^2(\mathbb{R}) = \overset{\perp}{\bigoplus}_{j \in \mathbb{Z}} W_j;$$

(iii)

$$w(x) \in W_j \Leftrightarrow w(2x) \in W_{j-1}.$$

**Demonstração:**

(i) Sem perda de generalidade, consideremos  $k > j$ . De acordo com a definição dos espaços  $W_j$ , e atendendo a que os espaços  $V_j$  estão encaixados, é imediato concluir que  $W_k \subset V_j$ , para  $k > j$ . Uma vez que  $W_j \perp V_j$ , segue-se que  $W_j \perp W_k$ , como pretendíamos provar.

(ii) De (2.21), vem

$$\begin{aligned} V_j &= V_{j+1} \overset{\perp}{\oplus} W_{j+1} \\ &= V_{j+2} \overset{\perp}{\oplus} W_{j+2} \overset{\perp}{\oplus} W_{j+1} \\ &= \dots = V_{j+k} \overset{\perp}{\oplus} W_{j+k} \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} W_{j+3} \overset{\perp}{\oplus} W_{j+2} \overset{\perp}{\oplus} W_{j+1} \end{aligned}$$

donde, das propriedades (AMR2) e (AMR3), se pode concluir que

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}}^{\perp} W_j.$$

(iii) Pela definição de  $W_j$ , tem-se que

$$w \in W_j \Leftrightarrow w \in V_{j-1} \text{ e } w \perp V_j.$$

Mas, pelo axioma (AMR4), vem

$$w(x) \in V_{j-1} \Leftrightarrow w(2x) \in V_{j-2}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} w \perp V_j &\Leftrightarrow \langle w(x), v(x) \rangle = 0 \quad \forall v \in V_j \\ &\Leftrightarrow \langle w(2x), v(2x) \rangle = 0 \quad \forall v \in V_j, \end{aligned}$$

e como por (AMR4),

$$v(x) \in V_j \Leftrightarrow v(2x) \in V_{j-1},$$

segue-se que,

$$w(x) \perp V_j \Leftrightarrow w(2x) \perp V_{j-1}.$$

Assim temos,

$$\begin{aligned} w \in W_j &\Leftrightarrow w(2x) \in V_{j-2} \text{ e } w(2x) \perp V_{j-1} \\ &\Leftrightarrow w(2x) \in W_{j-1}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

### 2.2.4 Ôndula ortogonal associada a uma AMR

Suponhamos, para já, que é possível encontrar uma função  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  tal que  $\{\psi(x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  é uma base ortonormada de  $W_0$ . Nesse caso, conclui-se facilmente de (iii) do teorema anterior que, para cada  $j \in \mathbb{Z}$ , o conjunto  $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  constitui uma base ortonormada do espaço  $W_j$ , o que, atendendo a (ii), garante que a colecção dessas bases,  $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ , forma uma base ortonormada de  $L^2(\mathbb{R})$ . Em resumo, podemos dizer que qualquer função  $\psi$  cujas translações inteiras formem uma base ortonormada do espaço  $W_0$  é uma ôndula ortogonal.

Acontece que, dada uma AMR, a função  $\psi$  acima referida existe sempre. Mais precisamente, tem-se o seguinte importante teorema cuja demonstração pode ser vista em, e.g., [Dau92, pp. 131-135].

**Teorema 2.4** *Seja  $\{V_j, \varphi\}$  uma AMR regular, com função de transferência  $H(\xi)$ . Então,  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  é uma ôndula ortogonal associada a esta AMR, ou seja,  $\psi$  é tal que  $\{\psi(x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  é uma base ortonormada de  $W_0$  (complemento ortogonal de  $V_0$  em  $V_{-1}$ ) se e só se a sua transformada de Fourier se escrever como*

$$\widehat{\psi}(\xi) = G(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2), \quad (2.23)$$

onde  $G(\xi)$  é uma função da forma

$$G(\xi) = e^{i\xi} \lambda(2\xi) \overline{H(\xi + \pi)}, \quad (2.24)$$

com  $\lambda$  uma qualquer função do espaço  $L^2([0, 2\pi])$  que verifique

$$|\lambda(\xi)| = 1. \quad (2.25)$$

Note-se que, de acordo com o resultado deste teorema, uma ôndula  $\psi$  associada a uma AMR está definida “a menos do produto” por uma função  $\lambda(\xi)$  de módulo 1.

**Nota 2.3** Juntando os resultados (2.18) e (2.23) – (2.25), concluimos que a ôndula associada a uma AMR (obtida de acordo com os resultados do teorema anterior) satisfaz

$$\widehat{\psi}(4k\pi) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad k \neq 0. \quad (2.26)$$

**Exemplo 2.1** Uma escolha simples para  $\lambda(\xi)$ , que verifica as condições impostas no Teorema 2.4, é  $\lambda(\xi) = 1$ . Nesse caso, tem-se

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\xi/2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l e^{il(\xi/2 + \pi)} \widehat{\varphi}(\xi/2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^l h_l e^{i\xi/2(l+1)} \widehat{\varphi}(\xi/2) \end{aligned}$$

e, efectuando uma mudança de variável  $l = -k - 1$ , vem

$$\widehat{\psi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k-1} h_{-k-1} e^{-i\xi/2k} \widehat{\varphi}(\xi/2).$$

Vemos assim que,

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(\xi) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k-1} h_{-k-1} E_{-k/2} D_2 \widehat{\varphi}(\xi) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k-1} h_{-k-1} \widehat{T_{k/2} D_{1/2} \varphi}(\xi), \end{aligned}$$

onde usámos as propriedades das transformadas de Fourier dos operadores de dilatação e translação referidas no Teorema 1.2. Tem-se, então, neste caso,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k-1} h_{-k-1} T_{k/2} D_{1/2} \varphi(x) \\ &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k-1} h_{-k-1} \varphi(2x - k). \end{aligned}$$

■



É importante referir que, seja qual for a escolha da função  $\lambda(\xi)$ , a ôndula  $\psi$  obtida por aplicação da fórmula (2.23) se escreve na forma

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2x - k), \quad (2.27)$$

onde, naturalmente, a sequência  $(g_k)$  depende do filtro  $(h_k)$  e da função  $\lambda(\xi)$  escolhida. No caso do exemplo anterior, ter-se-á

$$g_k = (-1)^{k-1} h_{-k-1}. \quad (2.28)$$

Outras escolhas de  $\lambda(\xi)$  permitem-nos considerar, por exemplo,

$$g_k = (-1)^k h_{-k+1}, \quad (2.29)$$

ou

$$g_k = (-1)^k h_{2M-1-k}, \quad (2.30)$$

com  $M$  um determinado inteiro.

## 2.3 Ôndulas de Daubechies

Nas diversas aplicações práticas de ôndulas é conveniente que elas possuam determinadas propriedades; uma das propriedades que se revela particularmente útil é que a ôndula utilizada tenha suporte compacto.

Uma forma de assegurar que  $\psi$  tenha suporte compacto é partir de uma função escala  $\varphi$  com essa mesma propriedade. Com efeito, da definição (2.9) dos coeficientes  $h_k$ :

$$h_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \varphi(2x - k) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x/2) \varphi(x - k) dx,$$

podemos concluir de imediato que, se  $\varphi$  tiver suporte compacto, apenas um número finito desses coeficientes serão não nulos. Assim sendo, a fórmula (2.27) garante que  $\psi$  será uma combinação linear finita de funções de suporte compacto, pelo que terá suporte compacto.

É importante salientar que no caso de  $\varphi$  ter suporte compacto, a respectiva função de transferência

$$H(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\xi}$$

reduzir-se-á a um polinómio trigonométrico, pelo que já referimos sobre a existência de apenas um número finito de  $h_k$ 's não nulos.

Outras propriedades desejáveis para as ôndulas são que estas possuam uma certa suavidade e também um certo número de momentos nulos, onde, recordamos, os momentos são definidos como se segue.

**Definição 2.4** *Dada uma função  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , define-se momento de ordem  $k$  de  $f$ , e denota-se por  $\mu_k := \mu_k(f)$ , como*

$$\mu_k := \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx. \quad (2.31)$$

O teorema seguinte, cuja demonstração pode ser vista em [Dau92, p.154], mostra que a existência de momentos nulos de uma ôndula é uma condição necessária para se assegurar que ela tenha uma certa suavidade.

**Teorema 2.5** *Seja  $\psi$  uma ôndula ortogonal de suporte compacto. Se  $\psi \in C^M(\mathbb{R})$ , com  $\psi^{(l)}$  limitada para  $l \leq M$ , então os primeiros  $M + 1$  momentos de  $\psi$  são nulos, isto é, tem-se*

$$\mu_l(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^l \psi(x) dx = 0; \quad l = 0, 1, \dots, M.$$

(Por uma questão de simplicidade e ser esse o caso que nos interessa, o resultado é enunciado aqui para ôndulas de suporte compacto, embora esta condição seja demasiado restritiva.)

**Nota 2.4** Por vezes, dizemos apenas que  $\psi$  tem  $M$  momentos nulos, querendo significar que são nulos os seus *primeiros*  $M$  momentos.

Em 1988, [Dau88], Ingrid Daubechies apresentou uma construção de uma família de ôndulas ortogonais que reúnem as importantes características de serem de suporte compacto, com um certo número de momentos nulos e suaves (com a sua suavidade e número de momentos nulos aumentando com o tamanho do suporte).

Devido às suas propriedades, estas ôndulas tornaram-se muito populares, sendo muito frequentemente utilizadas em aplicações; por serem também estas as ôndulas que utilizaremos nos capítulos seguintes, vamos indicar, embora de forma muito sucinta, os principais passos usados na construção de Daubechies. Antes, porém, introduzimos o seguinte teorema:

**Teorema 2.6** *Seja  $\psi$  a ôndula ortogonal associada a uma AMR com função escala  $\varphi$  e sejam  $H(\xi)$  e  $G(\xi)$ , respectivamente, a função de transferência de  $\varphi$  e a função definida por (2.24).<sup>2</sup> Se  $\widehat{\psi}(\xi)$  for  $M$  vezes continuamente diferenciável em  $\xi = 0$ , então tem-se a equivalência das seguintes condições:*

- (i) *a ôndula  $\psi$  tem os primeiros  $M$  momentos nulos;*
- (ii)  *$\widehat{\psi}(\xi)$  tem um zero de ordem  $M$  em  $\xi = 0$ ;*
- (iii) *a função  $G(\xi)$  tem um zero de ordem  $M$  em  $\xi = 0$ ;*
- (iv) *a função  $H(\xi)$  tem um zero de ordem  $M$  em  $\xi = \pi$ .*

**Demonstração:**

(i)  $\Leftrightarrow$  (ii) A propriedade (1.19) diz-nos que

$$\widehat{\psi}^{(k)}(\xi) = (-i)^k \widehat{(x^k \psi)}(\xi) = (-i)^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k \psi(x) e^{-i\xi x} dx,$$

pelo que se tem

$$\widehat{\psi}^{(k)}(0) = (-i)^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k \psi(x) dx = (-i)^k \mu_k(\psi),$$

donde se conclui de imediato o resultado.

---

<sup>2</sup>Por uma questão de simplicidade, assumimos aqui, embora tal não seja estritamente necessário, que  $\lambda(\xi) \equiv 1$ .

(ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) Estabelece-se facilmente por indução sobre  $M$ , fazendo uso da equação (2.23),

$$\widehat{\psi}(\xi) = G(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2),$$

e utilizando o facto de se ter  $\widehat{\varphi}(0) = 1$ .

(iii)  $\Leftrightarrow$  (iv) É uma consequência imediata da definição da função  $G$ , dada por (2.24) (com a assunção  $\lambda(\xi) \equiv 1$ ):

$$G(\xi) = e^{i\xi} H(\xi + \pi).$$

■

O passo de partida da construção das ôndulas de Daubechies é tentar encontrar um polinómio trigonométrico (de coeficientes reais)  $H(\xi)$  que satisfaça a condição

$$|H(\xi)|^2 + |H(\xi + \pi)|^2 = 1, \quad (2.32)$$

a qual  $H$  deverá satisfazer necessariamente, de acordo com o Teorema 2.1, se vier a corresponder à função de transferência associada a uma AMR ortogonal; veja a demonstração da condição (2.14) do referido teorema. Como, além disso, se pretende obter uma ôndula com  $M$  momentos nulos, ir-se-á, de acordo com o Teorema 2.6, exigir que a função  $H(\xi)$  tenha um zero de ordem  $M$  ( $M \geq 1$ ) em  $\xi = \pi$ . Este facto pode ser expresso de outra forma, através da factorização de  $H(\xi)$  como

$$H(\xi) = \left( \frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^M A(\xi), \quad M \geq 1 \quad (2.33)$$

para um certo polinómio trigonométrico  $A(\xi)$ . De (2.33), vem então

$$|H(\xi)|^2 = H(\xi) \overline{H(\xi)} = (\cos^2(\xi/2))^M B(\xi),$$

onde  $B(\xi) = |A(\xi)|^2$ . Como estamos a trabalhar com coeficientes reais,  $|A(\xi)|^2$  será uma função par podendo, portanto, ser escrita como um polinómio

$C$  em  $\cos(\xi)$ , ou, equivalentemente, usando a relação trigonométrica  $\cos(\xi) = 1 - 2\sin^2(\xi/2)$ , como um polinómio  $P$  em  $\sin^2(\xi/2)$ . Resumindo,  $|H(\xi)|^2$  deverá poder ser escrito na forma

$$|H(\xi)|^2 = (\cos^2(\xi/2))^M P(\sin^2(\xi/2)). \quad (2.34)$$

Tendo em conta as relações  $\cos^2(\frac{\xi+\pi}{2}) = \sin^2(\xi/2)$  e  $\sin^2(\frac{\xi+\pi}{2}) = \cos^2(\xi/2)$ , ter-se-á então

$$|H(\xi + \pi)|^2 = (\sin^2(\xi/2))^M P(\cos^2(\xi/2)) \quad (2.35)$$

Substituindo (2.34) e (2.35) em (2.32) e fazendo  $y = \sin^2(\xi/2)$ , obtém-se a seguinte condição para o polinómio  $P$ :

$$(1 - y)^M P(y) + y^M P(1 - y) = 1, \quad \forall y \in [0, 1]. \quad (2.36)$$

Pretende-se, portanto, encontrar um polinómio  $P(y)$  que satisfaça a condição anterior e seja tal que

$$P(y) \geq 0, \quad \forall y \in [0, 1]. \quad (2.37)$$

Daubechies prova, em [Dau88], que a solução geral desse problema é dada por polinómios da forma:

$$P(y) = \sum_{k=0}^{M-1} \binom{M-1+k}{k} y^k + y^M R(y)$$

onde  $R(y)$  é um polinómio que satisfaz  $R(1 - y) + R(y) = 0$ . Em particular, tomando  $R(y) \equiv 0$ , obtém-se, como solução particular do menor grau possível, o seguinte polinómio de grau  $M - 1$ :

$$P_M(y) = \sum_{k=0}^{M-1} \binom{M-1+k}{k} y^k. \quad (2.38)$$

Repare-se que se quer encontrar  $H(\xi)$  e não  $|H(\xi)|^2$ . Logo, será necessário determinar um polinómio trigonométrico  $A(\xi)$  tal que

$$|A(\xi)|^2 = P_M(\sin^2(\xi/2)). \quad (2.39)$$

O chamado Lema de Riesz garante que este problema tem sempre solução (não necessariamente única); mais precisamente, seguindo a demonstração construtiva desse lema, pode mostrar-se que uma das soluções da equação (2.39) será um polinómio trigonométrico da forma

$$A(\xi) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k e^{-ik\xi}, \quad a_k \in \mathbb{R};$$

para mais pormenores veja o já referido artigo [Dau88] ou [Dau92, pp.172-173].<sup>3</sup>

Daubechies mostrou, assim, como encontrar, para cada valor de  $M \in \mathbb{N}$ , um polinómio trigonométrico  $H(\xi) = H_M(\xi)$  de coeficientes reais, com grau  $2M - 1$ ,

$$H_M(\xi) = \sum_{k=0}^{2M-1} h_k e^{-ik\xi},$$

satisfazendo a condição de ortogonalidade (2.32) e tendo um zero de ordem  $M$  em  $\xi = \pi$ . Além disso, mostrou ainda que a cada um desses polinómios vai estar associada, através do uso da fórmula (2.20), uma função escala  $\varphi_M$  de uma AMR ortogonal de  $L^2(\mathbb{R})$ ; construindo a ôndula  $\psi_M(\xi)$  pela fórmula (2.27) com  $g_k$  dados por (2.30), isto é, sendo

$$\psi_M(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2M-1} g_k \varphi(2x - k), \quad g_k = (-1)^k h_{2M-1-k},$$

obtém-se uma ôndula ortogonal com as propriedades desejadas. Mais precisamente,  $\varphi_M$  e  $\psi_M$  satisfazem:

- (i)  $\varphi_M$  e  $\psi_M$  têm como suporte o intervalo  $[0, 2M - 1]$ ;
- (iii) a ôndula  $\psi_M$  tem os primeiros  $M$  momentos nulos;

---

<sup>3</sup>Das diversas soluções possíveis da Equação (2.39), a construção inicial de Daubechies, que corresponde a escolher  $A(\xi)$  com a chamada “fase mínima”, produz ôndulas bastante assimétricas; outras escolhas posteriores de Daubechies levaram à construção de ôndulas “menos assimétricas.”

- (iv) a suavidade de  $\psi_M$ , que é igual à de  $\varphi_M$ , cresce com  $M$ , tendo-se que, para  $M$  suficientemente grande,  $\varphi_M, \psi_M \in C^{\mu M}$ ,  $\mu \approx 0.2$ ; veja, e.g. [Dau92, p.220].

## 2.4 Transformadas rápidas com ôndulas

A estrutura de uma análise multi-resolução conduz a um esquema iterativo bastante eficiente, para a determinação dos coeficientes da expansão de uma determinada função numa base ortonormada de ôndulas. Na base deste esquema está a utilização dos filtros  $(h_k)$  e  $(g_k)$ , já introduzidos.

### 2.4.1 Transformada rápida directa

Das propriedades (AMR1) e (AMR3) de uma análise multi-resolução, sabemos que qualquer função  $f \in L^2(\mathbb{R})$  pode, desde que escolhamos  $j$  suficientemente pequeno, ser bem aproximada pela sua projecção ortogonal no espaço  $V_j$ .

Designemos por  $P_j$  o operador de projecção ortogonal no subespaço  $V_j$ , isto é,  $P_j : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow V_j$ , onde

$$(P_j f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k^j \varphi_{j,k}(x) \quad (2.40)$$

com os coeficientes  $s_k^j$  dados por

$$s_k^j = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle; \quad (2.41)$$

veja a Secção 1.5. Considerando  $j = -n$  a escala mais fina, ter-se-á, então

$$f(x) \sim f_{-n}(x) := P_{-n} f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k^{-n} \varphi_{-n,k}(x), \quad (2.42)$$

onde

$$s_k^{-n} = \langle f, \varphi_{-n,k} \rangle \quad (2.43)$$

Tendo em conta que o espaço  $V_{-n}$  admite uma decomposição da forma

$$V_{-n} = W_{-n+1} \overset{\perp}{\oplus} W_{-n+2} \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} W_{-n+J} \overset{\perp}{\oplus} V_{-n+J},$$

com  $J \in \mathbb{N}$ , a função  $f_{-n}$  poderá também expandir-se como

$$f_{-n}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k^{-n+J} \varphi_{-n+J,k}(x) + \sum_{j=-n+1}^{-n+J} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^j \psi_{jk}(x), \quad (2.44)$$

onde

$$s_k^j = \langle f, \varphi_{jk} \rangle \quad \text{e} \quad d_k^j = \langle f, \psi_{jk} \rangle. \quad (2.45)$$

A transformada rápida directa é um algoritmo muito eficiente para, partindo da sequência inicial  $\mathbf{s}^{-n} := (s_k^{-n})$ , obter as sequências  $\mathbf{d}^j := (d_k^j); j = -n + 1, \dots, -n + J$ , e a sequência  $\mathbf{s}^{-n+J} := (s_k^{-n+J})$  usadas na representação (2.44).

Em primeiro lugar, note-se que, de (2.7) e (2.8), obtém-se de imediato que as funções  $\varphi_{j,k}$  que constituem uma base do espaço  $V_j$  satisfazem

$$\begin{aligned} \varphi_{j,k}(x) &= 2^{-\frac{j}{2}} \varphi(2^{-j}x - k) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l 2^{\frac{-(j-1)}{2}} \varphi(2^{-(j-1)}x - (2k + l)) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l \varphi_{j-1,2k+l}(x). \end{aligned} \quad (2.46)$$

De forma análoga, tem-se que as funções  $\psi_{j,k}$  que formam uma base de  $W_j$ , se escrevem como

$$\psi_{j,k}(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l \varphi_{j-1,2k+l}(x). \quad (2.47)$$

Substituindo as expansões (2.46) e (2.47) nas expressões dos coeficientes  $s_k^j$  e  $d_k^j$  dadas por (2.45), obtém-se de imediato as seguinte fórmulas que exprimem os coeficientes de um nível “mais grosseiro” à custa dos coeficientes do nível “mais fino” imediatamente abaixo:

$$s_k^j = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l \langle f, \varphi_{j-1,2k+l} \rangle = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l s_{2k+l}^{j-1} \quad (2.48)$$

$$d_k^j = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l \langle f, \varphi_{j-1,2k+l} \rangle = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l s_{2k+l}^{j-1}. \quad (2.49)$$



Assim, partindo da sequência inicial  $\mathbf{s}^{-n}$ , e utilizando recursivamente as fórmulas anteriores, obtêm-se sucessivamente as sequências  $\mathbf{s}^{-n+1}, \mathbf{d}^{-n+1}, \mathbf{s}^{-n+2}, \mathbf{d}^{-n+2}, \dots, \mathbf{s}^{-n+J}, \mathbf{d}^{-n+J}$ ; ver esquema da Figura 2.1.

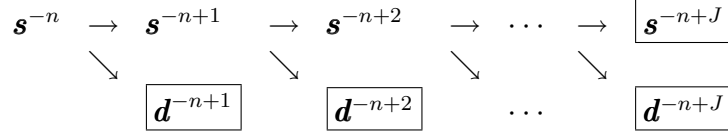


Figura 2.1: Esquema da transformada rápida directa

### 2.4.2 Transformada rápida inversa

Acabámos de ver como, partindo de uma amostra inicial de coeficientes  $\mathbf{s}^{-n} := (s_k^{-n})$  de uma função  $f$ , podem ser calculados os coeficientes dos níveis seguintes (mais “grosseiros”)  $\mathbf{s}^j = (s_k^j)$  e  $\mathbf{d}^j = (d_k^j)$  ( $j = -n+1, \dots, -n+J$ ). O processo que acabámos de descrever pode ser invertido, ou seja, supondo conhecidos os coeficientes  $\mathbf{d}^j = (d_k^j)$ ;  $j = -n+J, -n+J-1, \dots, -n+1$  e  $\mathbf{s}^{-n+J} = (s_k^{-n+J})$  é possível reconstruir a sequência  $\mathbf{s}^{-n} = (s_k^{-n})$ .

Seja  $Q_{j+1}$  o operador de projecção ortogonal no subespaço  $W_{j+1}$ , complemento ortogonal de  $V_{j+1}$  em  $V_j$ . Atendendo a (AMR1) e à propriedade (ii) do Teorema 1.5, sabemos que este operador é dado por

$$Q_{j+1} = P_j - P_{j+1}.$$

Assim, a projecção ortogonal de uma função  $f$  num certo espaço  $V_j$  pode ser escrita como,

$$\begin{aligned} P_j f &= P_{j+1} f + Q_{j+1} f \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} s_m^{j+1} \varphi_{j+1,m} + \sum_{m \in \mathbb{Z}} d_m^{j+1} \psi_{j+1,m}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Recordando (2.46), tem-se

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_{j+1,m}, \varphi_{j,2k+\epsilon} \rangle &= \left\langle \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \varphi_{j,2m+n}, \varphi_{j,2k+\epsilon} \right\rangle \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \langle \varphi_{j,2m+n}, \varphi_{j,2k+\epsilon} \rangle \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \delta_{2m+n, 2k+\epsilon} \\
&= h_{2(k-m)+\epsilon}.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

De forma análoga, usando (2.47), vemos que

$$\langle \psi_{j+1,m}, \psi_{j,2k+\epsilon} \rangle = g_{2(k-m)+\epsilon}. \tag{2.52}$$

Então, tem-se, para  $\epsilon = 0, 1$ ,

$$\begin{aligned}
s_{2k+\epsilon}^j &= \langle f, \varphi_{j,2k+\epsilon} \rangle \\
&= \langle P_j f, \varphi_{j,2k+\epsilon} \rangle \\
&= \left\langle \sum_{m \in \mathbb{Z}} s_m^{j+1} \varphi_{j+1,m} + \sum_{m \in \mathbb{Z}} d_m^{j+1} \psi_{j+1,m}, \varphi_{j,2k+\epsilon} \right\rangle && \text{(usando (2.50))} \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} s_m^{j+1} \langle \varphi_{j+1,m}, \varphi_{j,2k+\epsilon} \rangle + \sum_{m \in \mathbb{Z}} d_m^{j+1} \langle \psi_{j+1,m}, \psi_{j,2k+\epsilon} \rangle \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{2(k-m)+\epsilon} s_m^{j+1} + \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_{2(k-m)+\epsilon} d_m^{j+1} && \text{(por (2.51) e (2.52))}
\end{aligned}$$

Efectuando uma mudança de variável obtém-se,

$$s_{2k+\epsilon}^j = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{2l+\epsilon} s_{k-l}^{j+1} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{2l+\epsilon} d_{k-l}^{j+1}$$

ou seja, tem-se

$$s_{2k+\epsilon}^j = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (h_{2l+\epsilon} s_{k-l}^{j+1} + g_{2l+\epsilon} d_{k-l}^{j+1}) \quad \epsilon = 0, 1. \tag{2.53}$$

A fórmula anterior pode, então, ser usada sucessivamente para “ir subindo de nível”, até se chegar ao nível  $j = -n$  (ou seja, até se obter  $\mathbf{s}^{-n} = (s_k^{-n})$ ).

Este processo é ilustrado na figura seguinte:

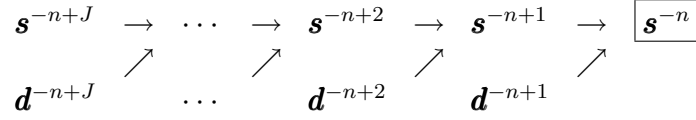


Figura 2.2: Esquema da transformada rápida inversa

### 2.4.3 Inicialização do processo de transformada rápida

O algoritmo da transformada rápida requer, como vimos, o conhecimento dos coeficientes iniciais  $s_k^{-n}$  da expansão de  $P_{-n}f$  na base  $\{\varphi_{-n,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ . Em muitas aplicações, a função  $f$  não é dada explicitamente, sendo apenas conhecida uma amostra dos seus valores, geralmente em pontos igualmente espaçados, da forma  $x_k = 2^{-n}k$ . Além disso, mesmo sendo  $f$  conhecida, os produtos internos (2.43) são dispendiosos de calcular, pelo que se evita muitas vezes o seu cálculo. Em muitas publicações onde se focam aplicações práticas de ôndulas, sugere-se que se considere simplesmente

$$s_k^{-n} = 2^{-n/2} f(2^{-n}k)$$

(por vezes, mesmo, omite-se a constante de escala  $2^{-n/2}$ ). Uma explicação heurística que justifica este procedimento, é a seguinte:

Tem-se

$$\begin{aligned} s_k^{-n} = \langle f, \varphi_{-n,k} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_{-n,k}(x) dx \\ &= 2^{n/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(2^n x - k) dx \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$= 2^{-n/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(2^{-n}(k+x)) \varphi(x) dx. \quad (2.55)$$

Seja  $\mu_1$  o momento de primeira ordem de  $\varphi$ , isto é, seja

$$\mu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx.$$

Supondo  $f$  suficientemente diferenciável e expandindo  $f$  em série de Taylor em torno do ponto  $2^{-n}(k + \mu_1)$ , vem

$$f(2^{-n}(k+x)) = f(2^{-n}(k + \mu_1)) + 2^{-n}(x - \mu_1) f'(2^{-n}(k + \mu_1)) + \mathcal{O}(2^{-2n})$$

Substituindo a expressão anterior na equação (2.55) e, atendendo a que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_1) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx - \mu_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \mu_1 - \mu_1 = 0,$$

obtém-se

$$s_k^{-n} = 2^{-n/2} f(2^{-n}(k + \mu_1)) + \mathcal{O}(2^{-\frac{5}{2}n}) \approx 2^{-n/2} f(2^{-n}(k + \mu_1)).$$

Assim, para  $n$  razoavelmente grande, os valores amostrais de  $f(2^{-n}k)$  são (a menos de uma translação por  $2^{-n}\mu_1$ ) boas aproximações para os coeficientes  $s_k^{-n}$ .

Se soubermos o valor de  $\mu_1$  e for possível obter os valores de  $f$  nos pontos da forma  $2^{-n}(k + \mu_1)$ , poderemos, naturalmente tomar os valores  $2^{-n/2} f(2^{-n}(k + \mu_1))$  como aproximações para os coeficientes  $s_k^{-n}$ . Isto corresponderá a aproximar o integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(2^n x - k) dx$  usando uma regra de quadratura baseada apenas num ponto

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(2^n x - k) dx \approx f(2^{-n}(k + \mu_1)).$$

Outras fórmulas de quadratura mais precisas, baseadas no uso de um maior número de pontos, podem ser usadas para aproximar os valores de  $s_k^{-n}$ ; veja, e.g. [SP94] e [BCR91].

Em [Dau92, p.166], sugere-se uma forma alternativa de obter os produtos internos  $\langle f, \varphi_{-n,k} \rangle$  a partir dos valores amostrais.

Qualquer processo de obtenção dos valores de  $s_k^{-n}$  a partir de  $f(2^{-n}k)$  é conhecido como *pré-processamento* ou *pré-filtragem*; outras formas de pré-processamento são também sugeridas em [SN96, pp. 232-233] ; ver também [Kei04, pp.43-45].

Convém observar que, se a função escala  $\varphi$  tiver um certo número de momentos nulos, i.e. satisfizer

$$\mu_k := \int_{-\infty}^{\infty} x^k \varphi(x) dx = 0; k = 1, \dots, p-1,$$

(note-se que  $\mu_0$  será sempre não nulo, já que  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1$ ), então ter-se-á

$$s_k^{-n} = 2^{-n/2} f(2^{-n}k) + \mathcal{O}(2^{-n(p+1/2)}),$$

supondo, naturalmente, que  $f$  é suficientemente diferenciável. Neste caso, se o valor de  $p$  for grande, os valores amostrais serão, de facto, muito boas aproximações para os coeficientes iniciais de  $P_{-n}f = \langle f, \varphi_{-n,k} \rangle$ .

Em [Dau93] foram construídas ôndulas de suporte compacto com um certo número de momentos nulos e cujas funções escala têm, elas próprias, diversos momentos nulos; estas ôndulas, que são conhecidas por *coiflets*, têm no entanto a desvantagem de possuírem suportes “mais largos” do que as ôndulas de Daubechies; veja e.g. [Dau92] ou [Dau93].

## 2.5 Periodização

Os conceitos de AMR, função escala e ôndulas que introduzimos até este momento referem-se ao espaço  $L^2(\mathbb{R})$ . Contudo, em muitas aplicações, estamos mais interessados em considerar funções definidas apenas num intervalo limitado de  $\mathbb{R}$ , por exemplo, no intervalo  $[0, 1]$ .<sup>4</sup> Torna-se, assim, necessário “transferir” o conceito de AMR para o espaço  $L^2([0, 1])$  e encontrar bases ortonormadas de ôndulas para esse espaço. Um dos processos mais simples de conseguir tal objectivo, frequentemente utilizado devido à sua facilidade de implementação, passa pela periodização das funções envolvidas. Nesta secção descrevemos com algum pormenor esse processo, mostrando como, de facto, ele pode ser usado para, a partir de uma AMR de  $L^2(\mathbb{R})$ , gerar uma AMR de  $L^2([0, 1])$ .

Relembremos que se define a *periodização*, com período 1, de uma função  $f$  (de decaimento suficientemente rápido), como sendo a função  $\tilde{f}$  definida

---

<sup>4</sup>Consideramos o intervalo  $[0, 1]$  por uma questão de simplicidade; a adaptação para qualquer outro intervalo limitado  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  é imediata.

por:

$$\tilde{f}(x) := \sum_{l \in \mathbb{Z}} f(x+l), \quad x \in \mathbb{R}; \quad (2.56)$$

veja (1.24), Secção 1.4. A função  $\tilde{f}$  é, por construção, uma função periódica de período 1, ou seja, está no espaço  $L^2([0, 1])$ .

Seja, então, dada uma AMR  $\{(V_j), \varphi\}$  de  $L^2(\mathbb{R})$  com  $\psi$  a respectiva ôndula associada.

Suponhamos, por uma questão de simplicidade, que  $\varphi$  tem suporte compacto, por exemplo que

$$\text{supp } \varphi = [0, L-1], \quad (2.57)$$

para  $L = 2M$ , com  $M$  um inteiro positivo (como será o caso das ôndulas de Daubechies com  $M$  momentos nulos, com as quais trabalharemos em especial). Nesse caso, ter-se-á a seguinte equação de dupla escala para  $\varphi$ :

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{l=0}^{L-1} h_l \varphi(2x-l). \quad (2.58)$$

Suponhamos também que os coeficientes  $g_l$  que definem a ôndula  $\psi$  a partir da função escala são escolhidos como

$$g_l = (-1)^l h_{L-1-l}, \quad (2.59)$$

tendo-se, então,

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{l=0}^{L-1} g_l \varphi(2x-l). \quad (2.60)$$

Nesse caso, o suporte de  $\psi$  é o mesmo de  $\varphi$ , ou seja, tem-se

$$\text{supp } \psi = [0, L-1]. \quad (2.61)$$

De (2.57) e (2.61) e tendo em conta as expressões para  $\varphi_{j,k}$  e  $\psi_{j,k}$  definidas, respectivamente em (2.1) e (2.7), vem

$$\text{supp } \varphi_{j,k} = \text{supp } \psi_{j,k} = [2^j k, 2^j (k+L-1)]. \quad (2.62)$$

De (2.58) e (2.60) tem-se também

$$\varphi_{j,k}(x) = \sum_{l=0}^{L-1} h_l \varphi_{j-1,2k+l}(x), \quad \psi_{j,k}(x) = \sum_{l=0}^{L-1} g_l \psi_{j-1,2k+l}(x). \quad (2.63)$$

Consideremos as periodizações das funções  $\varphi_{jk}$  e  $\psi_{jk}$ , isto é, sejam

$$\tilde{\varphi}_{j,k}(x) := \sum_{l \in \mathbb{Z}} \varphi_{j,k}(x+l) \quad (2.64)$$

e

$$\tilde{\psi}_{j,k}(x) := \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi_{j,k}(x+l). \quad (2.65)$$

Vamos começar por estabelecer algumas propriedades destas funções.

**Propriedade 2.1** *As funções  $\tilde{\varphi}_{j,k}$  e  $\tilde{\psi}_{j,k}$  são periódicas de período  $2^{-j}$  em  $k$ , isto é, tem-se*

$$\tilde{\varphi}_{j,k} \equiv \tilde{\varphi}_{j,k \bmod 2^{-j}} \quad \text{e} \quad \tilde{\psi}_{j,k} \equiv \tilde{\psi}_{j,k \bmod 2^{-j}}. \quad (2.66)$$

**Demonstração:** Vamos estabelecer (2.66) para as funções  $\tilde{\varphi}_{j,k}$ , sendo a demonstração para  $\tilde{\psi}_{j,k}$  totalmente análoga.

Tem-se

$$\tilde{\varphi}_{j,k+2^{-j}}(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \varphi_{j,k+2^{-j}}(x+l) \quad (2.67)$$

e por (2.7) vem,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{j,k+2^{-j}}(x) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^{-\frac{j}{2}} \varphi(2^{-j}(x+l) - (k+2^{-j})) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^{-\frac{j}{2}} \varphi(2^{-j}(x+l-1) - k) \\ &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} 2^{-\frac{j}{2}} \varphi(2^{-j}(x+p) - k) \\ &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \varphi_{j,k}(x+p) \\ &= \tilde{\varphi}_{j,k}(x), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

**Propriedade 2.2** Para  $j \geq 0$ , as funções  $\tilde{\varphi}_{j,k}$  são constantes.

**Demonstração:** Vejamos quais são os coeficientes de Fourier da função (periódica de período 1)  $\tilde{\varphi}_{j,k}$ . O seu  $l$ -ésimo coeficiente de Fourier é dado, tendo em conta (2.56) e a fórmula da Soma de Poisson, em particular (1.26), por

$$c_l(\tilde{\varphi}_{j,k}) = \widehat{\varphi}_{j,k}(2\pi l).$$

Assim, usando (2.2) e as propriedades (1.23) dos operadores (1.20) – (1.22), vem

$$\begin{aligned} c_l(\tilde{\varphi}_{j,k}) &= \widehat{T_{2^j k} D_{2^j} \varphi}(2\pi l) \\ &= E_{-2^j k} D_{2^{-j}} \widehat{\varphi}(2\pi l) \\ &= 2^{j/2} e^{-i2^{j+1} k \pi l} \widehat{\varphi}(2^{j+1} \pi l). \end{aligned} \quad (2.68)$$

De (2.18), segue-se que, para  $j \geq 0$ , se tem

$$c_l(\tilde{\varphi}_{j,k}) = 0, \quad l \neq 0.$$

Como

$$c_0(\tilde{\varphi}_{j,k}) = 2^{j/2} \widehat{\varphi}(0) = 2^{j/2},$$

podemos concluir que

$$\tilde{\varphi}_{j,k} \equiv 2^{j/2}, \quad j \geq 0.$$

■

**Propriedade 2.3** Para  $j > 0$ , as funções  $\tilde{\psi}_{j,k}$  são nulas.

**Demonstração:** De forma totalmente análoga à demonstração anterior, vemos que o  $l$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $\tilde{\psi}_{j,k}$  é dado por

$$c_l(\tilde{\psi}_{j,k}) = 2^{j/2} e^{-i2^{j+1} k \pi l} \widehat{\psi}(2^{j+1} \pi l).$$

De (2.26), vem então

$$c_l(\tilde{\psi}_{j,k}) = 0, \quad j > 0,$$



e o resultado segue de imediato. ■

Para  $j \leq 0$ , consideremos os espaços  $\widetilde{V}_j$  e  $\widetilde{W}_j$ , obtidos tomando o fecho em  $L^2([0, 1])$  dos espaços gerados pelas funções  $\widetilde{\varphi}_{j,k}$  e  $\widetilde{\psi}_{j,k}$ , respectivamente, isto é, sejam

$$\widetilde{V}_j = \overline{\langle \widetilde{\varphi}_{j,k} : k \in \mathbb{Z} \rangle} \quad \text{e} \quad \widetilde{W}_j = \overline{\langle \widetilde{\psi}_{j,k} : k \in \mathbb{Z} \rangle}, \quad j \leq 0. \quad (2.69)$$

O lema seguinte contém algumas propriedades destes espaços.

**Lema 2.1** *Sejam  $\widetilde{V}_j$  e  $\widetilde{W}_j$  os espaços definidos por (2.69). Então,*

(i)  $\{\widetilde{\varphi}_{j,k} : k = 0, \dots, 2^{-j} - 1\}$  e  $\{\widetilde{\psi}_{j,k} : k = 0, \dots, 2^{-j} - 1\}$  são bases ortonormadas de  $\widetilde{V}_j$  e  $\widetilde{W}_j$ , respectivamente;

(ii)

$$\widetilde{V}_j \subset \widetilde{V}_{j-1} \quad \text{e} \quad \widetilde{W}_j \subset \widetilde{W}_{j-1}; \quad (2.70)$$

(iii)

$$\widetilde{V}_{j-1} = \widetilde{V}_j \oplus \widetilde{W}_j; \quad (2.71)$$

(v)

$$\bigcup_{j \leq 0} \widetilde{V}_j = L^2([0, 1]). \quad (2.72)$$

**Demonstração:**

(i) Fazemos a demonstração para o caso das funções  $\{\widetilde{\varphi}_{jk}\}$ , sendo a demonstração do caso  $\{\widetilde{\psi}_{jk}\}$  totalmente idêntica.

Tendo em conta a definição dos espaços  $\widetilde{V}_j$  e a propriedade (2.66) das funções periodizadas  $\widetilde{\varphi}_{jk}$ , é imediato concluir que

$$\widetilde{V}_j := \overline{\langle \widetilde{\varphi}_{j,k} : k = 0, 1, \dots, 2^{-j} - 1 \rangle}.$$

Resta, então, provar que  $\{\widetilde{\varphi}_{jk}; k = 0, 1, \dots, 2^{-j} - 1\}$  é um conjunto ortonormado.

Usando a definição do produto interno em  $L^2([0, 1])$ , a definição das funções  $\tilde{\varphi}_{j,k}$  e o facto de estas serem funções periódicas de período 1, tem-se

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\varphi}_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,k'} \rangle_{L^2([0,1])} &= \int_0^1 \tilde{\varphi}_{j,k}(x) \tilde{\varphi}_{j,k'}(x) dx \\
&= \int_0^1 \sum_{l \in \mathbb{Z}} \varphi_{j,k}(x+l) \tilde{\varphi}_{j,k'}(x) dx \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_l^{l+1} \varphi_{j,k}(u) \tilde{\varphi}_{j,k'}(u+l) du \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_l^{l+1} \varphi_{j,k}(u) \tilde{\varphi}_{j,k'}(u) du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{j,k}(u) \tilde{\varphi}_{j,k'}(u) du \\
&= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{j,k}(u) \varphi_{j,k'}(u+s) du.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\varphi_{j,k'}(u+s) = 2^{-\frac{j}{2}} \varphi(2^{-j}(u+s) - k') = \varphi_{j,k'-2^{-j}s}(u),$$

donde se segue que

$$\langle \tilde{\varphi}_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,k'} \rangle_{L^2([0,1])} = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j,k'-2^{-j}s} \rangle. \quad (2.73)$$

Como as funções  $\{\varphi_{jk} : k \in \mathbb{Z}\}$  constituem um conjunto ortonormado em  $L^2(\mathbb{R})$ , podemos concluir de imediato que  $\langle \tilde{\varphi}_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,k'} \rangle_{L^2([0,1])} = 0$ , a não ser quando

$$k' - k = 2^{-j}s, \quad (2.74)$$

para algum  $s \in \mathbb{Z}$ , caso em que será  $\langle \tilde{\varphi}_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,k'} \rangle_{L^2([0,1])} = 1$ . Mas, para  $k, k' \in \{0, 1, \dots, 2^{-j} - 1\}$ , a condição (2.74) só será satisfeita para  $k' - k = 0$ , ou seja, para  $k = k'$ .

(ii) Temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_{j,k}(x) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \varphi_{j,k}(x+l) \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{p \in \mathbb{Z}} \eta_{j,p}^k \varphi_{j-1,p}(x+l) \right) \\
&= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \eta_{j,p}^k \sum_{l \in \mathbb{Z}} \varphi_{j-1,p}(x+l) \\
&= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \eta_{j,p}^k \tilde{\varphi}_{j-1,p}(x),
\end{aligned}$$

onde  $\eta_{j,p}^k = \langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j-1,p} \rangle$ . Logo, podemos concluir que  $\tilde{\varphi}_{j,k} \in \tilde{V}_{j-1}, \forall k \in \mathbb{Z}$ , o que mostra que  $\tilde{V}_j \subset \tilde{V}_{j-1}$ . De modo semelhante se mostra que  $\tilde{W}_j \subset \tilde{W}_{j-1}$ .

(iii) Temos, de (2.21), que todo o elemento de  $V_{j-1}$  se escreve, de modo único, como soma de um elemento de  $V_j$  com um elemento de  $W_j$ . Então, é imediato concluir, usando a definição dos espaços  $\tilde{V}_j$  e  $\tilde{W}_j$ , que todo o elemento de  $\tilde{V}_{j-1}$  é escrito, de modo único, como soma de um elemento de  $\tilde{V}_j$  com um elemento de  $\tilde{W}_j$ , isto é, tem-se

$$\tilde{V}_{j-1} = \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j.$$

Para mostrar que

$$\tilde{V}_j \perp \tilde{W}_j,$$

vejamos que  $\tilde{\psi}_{j,k} \perp \tilde{\varphi}_{j,k'}$ , com  $k, k' = 0, 1, \dots, 2^{-j} - 1$ . Efectuando uma dedução semelhante à efectuada em (2.73), vem que

$$\left\langle \tilde{\psi}_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,k'} \right\rangle_{L^2([0,1])} = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \left\langle \psi_{j,k+2^{-j}s}, \varphi_{j,k'} \right\rangle.$$

Como,  $\forall j \in \mathbb{Z}, \forall k, k' \in \mathbb{Z}, \psi_{j,k} \perp \varphi_{j,k'}$ , tem-se

$$\left\langle \tilde{\psi}_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,k'} \right\rangle_{L^2([0,1])} = 0,$$

como pretendíamos mostrar.

(iv) Seja  $\tilde{P}_j$  o operador de projecção ortogonal de  $L^2([0, 1])$  em  $\tilde{V}_j$ . Como  $\{\tilde{\varphi}_{j,k} : k = 0, \dots, 2^{-j} - 1\}$  é uma base ortonormada de  $\tilde{V}_j$ , tem-se que, dada  $f \in L^2([0, 1])$ ,

$$\tilde{P}_j f = \sum_{k=0}^{2^{-j}-1} \langle f, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle \tilde{\varphi}_{j,k}.$$

Consideremos a função

$$e_l(x) := e^{2\pi i l x} \quad (2.75)$$

e calculemos o  $l$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $\tilde{P}_j e_l$ , isto é, da sua projecção no espaço  $\tilde{V}_j$ . Como

$$\tilde{P}_j e_l = \sum_{k=0}^{2^{-j}-1} \langle e_l, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle \tilde{\varphi}_{j,k}$$

temos que,

$$\begin{aligned} c_l(\tilde{P}_j e_l) &= \sum_{k=0}^{2^{-j}-1} \int_0^1 \langle e_l, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle \tilde{\varphi}_{j,k}(x) e^{-2\pi i l x} dx \\ &= \sum_{k=0}^{2^{-j}-1} \langle e_l, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle \langle \tilde{\varphi}_{j,k}, e_l \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{2^{-j}-1} \overline{\langle \tilde{\varphi}_{j,k}, e_l \rangle} \langle \tilde{\varphi}_{j,k}, e_l \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{2^{-j}-1} |\langle \tilde{\varphi}_{j,k}, e_l \rangle|^2. \end{aligned}$$

Mas, se atendermos à definição da função  $e_l$ , vemos que a quantidade  $\langle \tilde{\varphi}_{j,k}, e_l \rangle$  não é mais do que o  $l$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $\tilde{\varphi}_{j,k}$ . Tendo em conta a expressão (2.68) desse coeficiente, obtém-se,

$$\begin{aligned} c_l(\tilde{P}_j e_l) &= \sum_{k=0}^{2^{-j}-1} (2^{j/2})^2 |\hat{\varphi}(2^{j+1}\pi l)|^2 \\ &= 2^{-j} 2^j |\hat{\varphi}(2^{j+1}\pi l)|^2 \\ &= |\hat{\varphi}(2^{j+1}\pi l)|^2 \end{aligned}$$

Assim, quando  $j \rightarrow -\infty$ , o  $l$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $\tilde{P}_j e_l$  tende para 1. Como  $e_l$  é uma função de norma 1 e  $\|\tilde{P}_j\| = 1$  (trata-se de um operador de projecção ortogonal), podemos concluir que  $(\tilde{P}_j e_l)(x) \rightarrow e^{i2\pi l x} = e_l(x)$  quando  $j \rightarrow -\infty$ . Uma vez que o conjunto das funções  $\{e_l(x) = e^{i2\pi l x} : l \in \mathbb{Z}\}$  constitui uma base ortonormada do espaço  $L^2([0, 1])$ , segue-se que, dada qualquer função  $f \in L^2([0, 1])$ , se tem  $\tilde{P}_j f \rightarrow f$ , o que implica o resultado (2.72).

■

Segue-se de imediato de (2.63), que as funções periodizadas definidas por (2.64) e (2.65) satisfazem

$$\tilde{\varphi}_{j,k}(x) = \sum_{l=0}^{L-1} h_l \tilde{\varphi}_{j-1, 2k+l}(x), \quad \tilde{\psi}_{j,k}(x) = \sum_{l=0}^{L-1} g_l \tilde{\varphi}_{j-1, 2k-l}(x). \quad (2.76)$$

Dada uma função  $f \in L^2([0, 1])$ , definem-se então os seus coeficientes relativos às ôndulas periodizadas, por

$$\tilde{s}_k^j := \langle f, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle_{L^2([0,1])} = \int_0^1 f(x) \tilde{\varphi}_{j,k}(x) dx, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.77)$$

e

$$\tilde{d}_k^j := \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle_{L^2([0,1])} = \int_0^1 f(x) \tilde{\psi}_{j,k}(x) dx, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.78)$$

De notar que, atendendo a (2.66), se tem

$$\tilde{s}_k^j \equiv \tilde{s}_{k, \bmod 2^{-j}}^j \quad \text{e} \quad \tilde{d}_k^j \equiv \tilde{d}_{k, \bmod 2^{-j}}^j, \quad (2.79)$$

ou seja, que as sequências  $\tilde{\mathbf{s}}^j = (\tilde{s}_k^j)$  e  $\tilde{\mathbf{d}}^j = (\tilde{d}_k^j)$  são periódicas de período  $2^{-j}$  em  $k$ .

De (2.77) e (2.78), e tendo em atenção o resultado (2.76), deduzem-se facilmente as seguintes fórmulas para a transformada directa e transformada inversa com ôndulas periodizadas, análogas às fórmulas obtidas para o caso das transformadas em  $L^2(\mathbb{R})$ :

$$\tilde{s}_k^j = \sum_{l=0}^{L-1} h_l \tilde{s}_{l+2k}^{j-1} \quad \text{e} \quad \tilde{d}_k^j = \sum_{l=0}^{L-1} g_l \tilde{s}_{l+2k}^{j-1} \quad (2.80)$$

para a transformada directa e

$$\tilde{s}_{2k+\epsilon}^j = \sum_{l=0}^{L/2-1} h_{2l+\epsilon} \tilde{s}_{k-l}^{j+1} + \sum_{l=0}^{L/2-1} g_{2l+\epsilon} \tilde{d}_{k-l}^{j+1}, \quad \epsilon = 0, 1. \quad (2.81)$$

para a transformada inversa.

**Nota 2.5** Para além do processo de periodização, existem outras formas de construir ôndulas especialmente adaptadas ao intervalo; a primeira construção deste tipo de ôndulas – conhecidas por *ôndulas no intervalo* – foi introduzida por Y. Meyer em [Mey91], sendo o processo melhorado posteriormente por Cohen, Daubechies e Vial, em [CDV93].

## Capítulo 3

# Representação de Operadores Usando Ôndulas

No artigo de Beylkin, Coifman e Rokhlin [BCR91] são descritos dois esquemas para o cálculo numérico de operadores, os quais passam pela sua representação usando ôndulas: um deles constitui a chamada *forma standard* e o outro, introduzido precisamente no citado artigo, constitui a chamada *forma não-standard*. O objectivo deste capítulo é a descrição pormenorizada de como estas representações podem ser construídas e usadas no cálculo de operadores. Para além do artigo [BCR91] já referido, para a escrita deste capítulo usámos também os artigos [Bey92], [BCR92] e [Koo93a].

### 3.1 Forma não-standard

Começaremos por analisar a construção da forma não-standard, já que é sempre possível, partindo desta forma, construir a forma standard. Embora haja outros processos de construir a forma standard, optámos por descrever a sua construção passando pela construção prévia da forma não-standard.

#### 3.1.1 Representação de operadores em $L^2(\mathbb{R})$

A descrição da construção da forma não-standard de um operador relativa a uma determinada base de ôndulas será feita inicialmente para um operador

definido em todo o espaço  $L^2(\mathbb{R})$ . Seja, então,  $T$  um operador linear contínuo

$$T : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}).$$

O que se pretende é obter (uma aproximação para)  $Tf$ , imagem por  $T$  de uma dada função  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , de uma forma eficiente, usando ôndulas.

Na prática, a função  $f$  estará definida apenas num determinado intervalo, por exemplo, o intervalo  $[0, 1]$ , e o operador actuará, então, apenas em  $L^2([0, 1])$ . A adaptação para este caso, através do uso de periodização, será referida na secção seguinte.

Consideremos, então, que dispomos de uma AMR  $\{V_j, \varphi\}$  de  $L^2(\mathbb{R})$  com ôndula associada  $\psi$  e, como habitualmente, designemos por  $W_j$  os espaços de detalhe associados a esta AMR. Sejam ainda  $P_j$  e  $Q_j$  os operadores de projecção ortogonal do espaço  $L^2(\mathbb{R})$  em  $V_j$  e  $W_j$ , respectivamente, isto é, sejam

$$P_j : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow V_j, \quad Q_j : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow W_j,$$

tais que

$$(P_j f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k^j \varphi_{j,k}(x), \quad (Q_j f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^j \psi_{j,k}(x),$$

onde

$$s_k^j = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle, \quad d_k^j = \langle f, \psi_{j,k} \rangle.$$

Relembremos que, para cada  $j$ , se tem

$$P_j = Q_{j+1} + P_{j+1}. \tag{3.1}$$

Para obter um algoritmo numérico, começaremos sempre com uma discretização correspondente a uma determinada resolução, suficientemente fina, mas finita; mais especificamente, denotando por  $T_j$  o operador obtido por projecção de  $T$  em  $V_j$ , isto é, sendo

$$T_j := P_j T P_j, \tag{3.2}$$



é escolhida uma escala suficientemente fina  $j = -n$  e toma-se  $T_{-n}$  como aproximação para  $T$ .

Tendo em conta a fórmula (3.1), é imediato concluir que, em cada escala  $j$ , o operador  $T_j$  pode ser decomposto numa soma de quatro parcelas :

$$T_j = T_{j+1} + Q_{j+1}TQ_{j+1} + Q_{j+1}TP_{j+1} + P_{j+1}TQ_{j+1}. \quad (3.3)$$

Introduzindo a notação

$$A_j := Q_jTQ_j, \quad (A_j : W_j \longrightarrow W_j) \quad (3.4)$$

$$B_j := Q_jTP_j, \quad (B_j : V_j \longrightarrow W_j) \quad (3.5)$$

$$G_j := P_jTQ_j, \quad (G_j : W_j \longrightarrow V_j), \quad (3.6)$$

vem,

$$T_j = T_{j+1} + A_{j+1} + B_{j+1} + G_{j+1}. \quad (3.7)$$

Começando em  $T_{-n}$  e usando a decomposição (3.7) sucessivamente até uma determinada escala mais grosseira  $j = 0$ , obtém-se

$$T \sim T_{-n} = \sum_{l=1}^n (A_{-n+l} + B_{-n+l} + G_{-n+l}) + T_0. \quad (3.8)$$

A forma não-standard do operador  $T$  (no caso de considerarmos uma escala mais fina  $j = -n$  e decompormos até uma certa escala  $j = 0$ ) é uma representação de  $T \sim T_{-n}$  como uma cadeia de triplos de operadores  $\{A_{-n+l}, B_{-n+l}, G_{-n+l}\}_{l=1}^n$ , juntamente com o operador  $T_0$ , i.e.

$$T \sim T_{-n} = \{\{A_{-n+l}, B_{-n+l}, G_{-n+l}\}_{l=1}^n, T_0\}. \quad (3.9)$$

Os operadores  $\{A_j, B_j, G_j\}$  admitem uma definição recursiva através da relação

$$T_j = \begin{pmatrix} A_{j+1} & B_{j+1} \\ G_{j+1} & T_{j+1} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

onde o operador representado por esta matriz  $2 \times 2$  é uma aplicação

$$\begin{pmatrix} A_{j+1} & B_{j+1} \\ G_{j+1} & T_{j+1} \end{pmatrix} : W_{j+1} \oplus V_{j+1} \longrightarrow W_{j+1} \oplus V_{j+1}. \quad (3.11)$$

Fixadas as bases  $\{\varphi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  de  $V_j$  e  $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  de  $W_j$ , a cada um dos operadores lineares  $A_j, B_j, G_j$  e  $T_j$  corresponderá, então, uma “matriz” (possivelmente, de dimensão infinita) relativa ao uso dessas bases para os espaços de partida e de chegada. Por exemplo, ao operador  $A_j$  irá corresponder uma determinada matriz quando se toma a mesma base  $\{\varphi_{j,k}\}$ , quer para o espaço de partida ( $V_j$ ), quer para o espaço de chegada ( $V_j$ ).<sup>1</sup>

Denotaremos por  $\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_j, \mathcal{G}_j$  e  $\mathcal{T}_j$  as matrizes correspondentes aos operadores  $A_j, B_j, G_j$  e  $T_j$ , respectivamente. Sendo  $\alpha_{k,k'}^j, \beta_{k,k'}^j, \gamma_{k,k'}^j$  e  $s_{k,k'}^j$ , os elementos constitutivos dessas matrizes, isto é, sendo

$$\mathcal{A}_j = (\alpha_{k,k'}^j), \quad \mathcal{B}_j = (\beta_{k,k'}^j), \quad \mathcal{G}_j = (\gamma_{k,k'}^j) \quad \text{e} \quad \mathcal{T}_j = (s_{k,k'}^j), \quad (3.12)$$

ter-se-á, naturalmente, por definição de matriz de um operador linear relativa a um par de bases:

$$\alpha_{k,k'}^j = \langle T\psi_{j,k'}, \psi_{j,k} \rangle, \quad \beta_{k,k'}^j = \langle T\varphi_{j,k'}, \psi_{j,k} \rangle, \quad (3.13)$$

$$\gamma_{k,k'}^j = \langle T\psi_{j,k'}, \varphi_{j,k} \rangle, \quad s_{k,k'}^j = \langle T\varphi_{j,k'}, \varphi_{j,k} \rangle. \quad (3.14)$$

É conveniente dispor as matrizes  $\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_j, \mathcal{G}_j; j = 0, 1, \dots, -n + 1$  e  $\mathcal{T}_0$  como blocos de uma matriz como a que se apresenta na Figura 3.1, a qual constituirá, então, a representação matricial da forma não-standard de  $T$ .

---

<sup>1</sup>Na prática, cada espaço  $V_j$  e  $W_j$  será um espaço de dimensão finita, pelo que, a cada um dos operadores vai corresponder, efectivamente, uma “verdadeira” matriz; por exemplo, quando usamos a periodização, tem-se  $\dim V_j = \dim W_j = 2^{-j}$ , sendo esta a dimensão de cada uma das matrizes correspondentes.

$\mathcal{T}_0$	$\mathcal{G}_0$		
$\mathcal{B}_0$	$\mathcal{A}_0$		

Assim, supondo conhecidos os coeficientes  $(s_{k,k'}^{-n})$ , uma aplicação repetida das fórmulas anteriores, para  $j$  sucessivamente igual a  $-n+1, -n+2, \dots, 0$ , permitir-nos-á encontrar todos os elementos necessários à construção da representação não-standard do nosso operador.

### 3.1.2 Determinação de $Tf$

Uma vez obtida a representação matricial não-standard do operador, resta agora explicar como utilizá-la na determinação da imagem de uma dada função  $f$ .

Supondo conhecida a projecção de  $f$  no espaço  $V_{-n}$ , isto é, supondo conhecida a sequência  $\mathbf{s}^{-n} = (s_k^{-n}) = (\langle f, \varphi_{-n,k} \rangle)$  dos coeficientes de  $P_{-n}f$  na base  $\{\varphi_{-n,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  de  $V_{-n}$ , haverá primeiramente que encontrar a correspondente “forma não-standard” desta sequência. Esta forma é obtida calculando, para  $j = -n+1, -n+2, \dots, 0$ , as sequências  $\mathbf{s}^j = (s_k^j)$  e  $\mathbf{d}^j = (d_k^j)$ , através do uso do esquema da transformada rápida, isto é, usando as fórmulas (2.48)-(2.49) (ver esquema da Figura 3.2) e dispondo essas sequências na forma

$$\mathbf{S} = (\mathbf{s}^0, \mathbf{d}^0, \mathbf{s}^1, \mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{s}^{-n+2}, \mathbf{d}^{-n+2}, \mathbf{s}^{-n+1}, \mathbf{d}^{-n+1}) \quad (3.17)$$

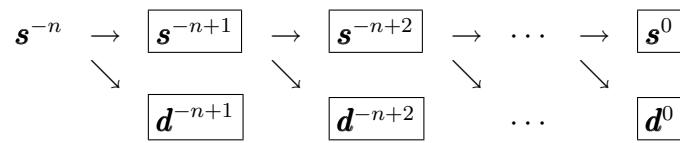


Figura 3.2: Obtenção da forma não-standard de  $\mathbf{s}^{-n}$

O passo seguinte consistirá em obter as sequências transformadas

$$\widehat{\mathbf{s}}^j, \widehat{\mathbf{d}}^j; j = 0, 1, \dots, -n+1,$$

através do uso das fórmulas

$$\widehat{\mathbf{d}}^j = \mathcal{A}_j \mathbf{d}^j + \mathcal{B}_j \mathbf{s}^j; j = 0, 1, \dots, -n + 1, \quad (3.18)$$

$$\widehat{\mathbf{s}}^j = \mathcal{G}_j \mathbf{d}^j; j = 1, \dots, -n + 1, \quad \widehat{\mathbf{s}}^0 = \mathcal{T}_0 \mathbf{s}^0 + \mathcal{G}_0 \mathbf{d}^0. \quad (3.19)$$

Evidentemente, isto corresponderá a obter a sequência

$$\widehat{\mathbf{S}}^T = (\widehat{\mathbf{s}}^0, \widehat{\mathbf{d}}^0, \widehat{\mathbf{s}}^1, \widehat{\mathbf{d}}^1, \dots, \widehat{\mathbf{s}}^{-n+2}, \widehat{\mathbf{d}}^{-n+2}, \widehat{\mathbf{s}}^{-n+1}, \widehat{\mathbf{d}}^{-n+1})^T \quad (3.20)$$

efectuando a pré-multiplicação do vector-coluna  $\mathbf{S}^T$  pela matriz da representação não-standard de  $T$  (matriz da Figura 3.1).

O cálculo da sequência  $\widehat{\mathbf{s}}^{-n}$  dos coeficientes da imagem de  $f$ ,  $T_{-n}f$ , relativos à base  $\{\varphi_{-n,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  de  $V_{-n}$ , a partir da sequência anterior, deverá ser feito aplicando repetidamente, para  $j = 0, -1, \dots, -n + 1$ , a seguinte fórmula recursiva

$$\widehat{s}_{2k+\epsilon}^{j-1} \leftarrow \widehat{s}_{2k+\epsilon}^{j-1} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left( h_{2l+\epsilon} \widehat{s}_{k-l}^j + g_{2l+\epsilon} \widehat{d}_{k-l}^j \right); \quad \epsilon = 0, 1. \quad (3.21)$$

Por outras palavras, em cada passo, aplica-se a transformada inversa (2.53) às sequências  $\widehat{\mathbf{s}}^j$  e  $\widehat{\mathbf{d}}^j$  para gerar uma sequência  $\widehat{\mathbf{s}}^{j-1}$ , a qual deverá ser adicionada à “antiga” sequência  $\widehat{\mathbf{s}}^{j-1}$  para produzir uma “nova” sequência  $\widehat{\mathbf{s}}^{j-1}$  a usar no passo seguinte; ver esquema da Figura 3.3.

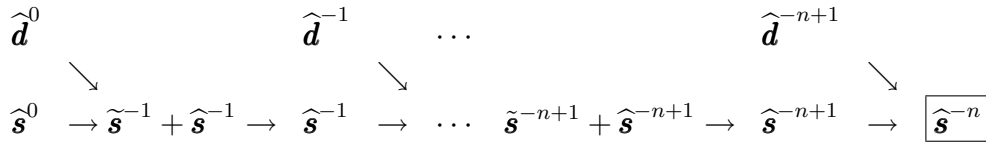


Figura 3.3: Determinação de  $\widehat{\mathbf{s}}^{-n}$

### 3.1.3 Operadores em $L^2([0, 1])$ e periodização

Vamos agora considerar o caso em que o operador  $T$  é um operador actuando no espaço  $L^2([0, 1])$ .

Suponhamos que tomamos para função escala  $\varphi$  da nossa AMR uma função de suporte compacto; por exemplo,  $\varphi$  poderá ser a função escala de Daubechies com suporte  $[0, L - 1]$ , onde  $L = 2M$ , para um certo inteiro positivo  $M$ , à qual corresponde a ôndula de Daubechies  $\psi = \psi_M$  com  $M$  momentos nulos.

Considerando a AMR de  $L^2([0, 1])$  obtida por periodização, tal como se descreveu no Capítulo 2, facilmente se constata que todo o processo referido para o espaço  $L^2(\mathbb{R})$  se adapta facilmente para este caso. Haverá que construir as matrizes “periodizadas”  $\tilde{\mathcal{A}}_j, \tilde{\mathcal{B}}_j, \tilde{\mathcal{G}}_j$  e  $\tilde{\mathcal{T}}_j$  cujos elementos são, agora, dados por

$$\tilde{\alpha}_{k,k'}^j = \left\langle T\tilde{\psi}_{j,k'}, \tilde{\psi}_{j,k} \right\rangle_{L^2([0,1])}, \quad \tilde{\beta}_{k,k'}^j = \left\langle T\tilde{\varphi}_{j,k'}, \tilde{\psi}_{j,k} \right\rangle_{L^2([0,1])}, \quad (3.22)$$

$$\tilde{\gamma}_{k,k'}^j = \left\langle T\tilde{\psi}_{j,k'}, \tilde{\varphi}_{j,k} \right\rangle_{L^2([0,1])}, \quad \tilde{s}_{k,k'}^j = \left\langle T\tilde{\varphi}_{j,k'}, \tilde{\varphi}_{j,k} \right\rangle_{L^2([0,1])}. \quad (3.23)$$

Note-se que cada uma das matrizes referidas tem, neste caso, ordem  $2^{-j}$ , pelo que a matriz da representação não-standard de  $T$ , considerando como escala mais fina  $j = -n$  e supondo que a decomposição é efectuada até ao nível mais grosseiro  $j = 0$ <sup>2</sup> será um matriz quadrada de dimensão

$$D = 2 \times 2^{n-1} + 2 \times 2^{n-2} + \dots + 2 \times 2^0 = 2(2^n - 1). \quad (3.24)$$

As fórmulas (3.15)-(3.16) são, agora, substituídas por

$$\tilde{\alpha}_{k,k'}^j = \sum_{l,l'=0}^{L-1} g_l g_{l'} \tilde{s}_{2k+l, 2k'+l'}^{j-1}, \quad \tilde{\beta}_{k,k'}^j = \sum_{l,l'=0}^{L-1} g_l h_{l'} \tilde{s}_{2k+l, 2k'+l'}^{j-1}, \quad (3.25)$$

$$\tilde{\gamma}_{k,k'}^j = \sum_{l,l'=0}^{L-1} h_l g_{l'} \tilde{s}_{2k+l, 2k'+l'}^{j-1}, \quad \tilde{s}_{k,k'}^j = \sum_{l,l'=0}^{L-1} h_l h_{l'} \tilde{s}_{2k+l, 2k'+l'}^{j-1}, \quad (3.26)$$

tendo-se, naturalmente, que  $\tilde{w}_{k,k'}^j$  ( $w = \alpha, \beta, \gamma, s$ ) são periódicas de período  $2^{-j}$  em  $k$  e em  $k'$ . Assim, verificamos novamente que a obtenção da forma

---

<sup>2</sup>No caso que estamos agora a considerar, este é mesmo o nível mais grosseiro que podemos tomar.

não-standard de  $T$  requer apenas o conhecimento da matriz inicial  $(\tilde{s}_{k,k'}^{-n})$  que representa  $T \sim T_{-n} = \tilde{P}_{-n} T \tilde{P}_{-n}$  na base  $\{\tilde{\varphi}_{-n}\}$  de  $V_{-n}$ . (Usamos aqui a notação  $\tilde{P}_j$  para denotar a projecção ortogonal de  $L^2([0,1])$  em  $\tilde{V}_j$ ). De modo análogo, para calcular  $Tf$ , haverá primeiro que encontrar a sequência inicial  $\tilde{s}^{-n}$  e usar fórmulas análogas às fórmulas (3.18), (3.19) e (3.21).

### 3.1.4 Inicialização da construção da forma não-standard

Como vimos, a construção da forma não-standard de  $T$  pressupõe o conhecimento da matriz  $(\tilde{s}_{k,k'}^{-n})$  para se inicializar o processo.

Para alguns operadores frequentemente utilizados, como por exemplo, operadores diferenciais, ou operadores de tipo de convolução é possível obter explicitamente os elementos dessa matriz; veja, e.g. [BCR91], [Bey92] e [BCR92]. No capítulo seguinte, estudaremos em detalhe, a título de exemplo, o caso do operador  $\frac{d}{dx}$ . No entanto, para outro tipo de operadores, essa forma explícita não é fácil de obter. Nesse caso, os elementos dessa matriz poderão simplesmente ser aproximados por valores amostrais do seu núcleo

$$\tilde{s}_{k,k'}^{-n} \approx K(2^{-n}k, 2^{-n}k'); k, k' = 0, 1, \dots, 2^n - 1, \quad (3.27)$$

aproximando-se também o vector  $s_k^{-n}$  por

$$\tilde{s}_k^{-n} \approx 2^{-n/2} f(2^{-n}k); k = 0, 1, \dots, 2^n - 1.$$

Outros processos mais sofisticados de obter  $(\tilde{s}_{k,k'}^{-n})$  a partir dos valores amostrais podem também ser usados; veja, a este propósito, os comentários da Secção 2.4.3, e ainda [BCR91].

## 3.2 Forma standard

Vejamos agora em que consiste a representação standard de um operador e como ela pode ser facilmente obtida a partir da forma não-standard.

### 3.2.1 Representação matricial

Relembremos que

$$\begin{aligned} T &\sim T_{-n} = P_{-n}TP_{-n} \\ &= T_0 + \sum_{l=1}^n (A_{-n+l} + B_{-n+l} + G_{-n+l}), \end{aligned}$$

onde os operadores  $A_j$ ,  $B_j$ ,  $G_j$  e  $T_j$  são definidos por (3.4), (3.5), (3.6) e (3.2), isto é,

$$\begin{aligned} A_j &:= Q_j T Q_j, & (A_j : W_j \longrightarrow W_j), \\ B_j &:= Q_j T P_j, & (B_j : V_j \longrightarrow W_j), \\ G_j &:= P_j T Q_j, & (G_j : W_j \longrightarrow V_j), \\ T_j &:= P_j T P_j, & (T_j : V_j \longrightarrow V_j). \end{aligned}$$

Mas, tendo em conta a fórmula (3.1), facilmente se verifica que, para  $l = 1, \dots, n-1$ , se tem

$$P_{-n+l} = \sum_{k=1}^{n-l} Q_{-n+l+k} + P_0.$$

Desta forma,  $T$  pode também ser escrito como,

$$\begin{aligned} T &\sim T_0 + \sum_{l=1}^n A_{-n+l} + \sum_{l=1}^{n-1} Q_{-n+l} T P_{-n+l} + \sum_{l=1}^{n-1} P_{-n+l} T Q_{-n+l} + Q_0 T P_0 + P_0 T Q_0 \\ &= T_0 + \sum_{l=1}^n A_{-n+l} + \sum_{l=1}^{n-1} \left( Q_{-n+l} T \left( \sum_{k=1}^{n-l} Q_{-n+l+k} + P_0 \right) \right) \\ &\quad + \sum_{l=1}^{n-1} \left( \left( \sum_{k=1}^{n-l} Q_{-n+l+k} + P_0 \right) T Q_{-n+l} \right) + Q_0 T P_0 + P_0 T Q_0 \\ &= T_0 + \sum_{l=1}^n A_{-n+l} + \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-l} Q_{-n+l} T Q_{-n+l+k} + \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-l} Q_{-n+l+k} T Q_{-n+l} \\ &\quad + \sum_{l=1}^n Q_{-n+l} T P_0 + \sum_{l=1}^n P_0 T Q_{-n+l}. \end{aligned}$$



Introduzindo as seguintes notações

$$B_j^\ell := Q_j T Q_\ell; \ell > j, \ell \leq 0, \quad (B_j^\ell : W_\ell \longrightarrow W_j), \quad (3.28)$$

$$B_j^1 := Q_j T P_0; j = -n+1, \dots, 0, \quad (B_j^1 : V_0 \longrightarrow W_j), \quad (3.29)$$

$$G_j^\ell := Q_\ell T Q_j; \ell > j, \ell \leq 0, \quad (G_j^\ell : W_j \longrightarrow W_\ell), \quad (3.30)$$

$$G_j^1 := P_0 T Q_j; j = -n+1, \dots, 0, \quad (G_j^1 : W_j \longrightarrow V_0), \quad (3.31)$$

podemos então escrever, numa forma mais simples,

$$\begin{aligned} T \sim T_0 + \sum_{l=1}^n A_{-n+l} + \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{n-l} B_{-n+l}^{-n+l+k} + \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{n-l} G_{-n+l}^{-n+l+k} \\ + \sum_{l=1}^n B_{-n+l}^1 + \sum_{l=1}^n G_{-n+l}^1. \end{aligned} \quad (3.32)$$

**Nota 3.2** Note-se que, de acordo com as notações introduzidas, se tem

$$B_0^1 = B_0 \quad \text{e} \quad G_0^1 = G_0.$$

A *representação standard* de  $T$  é precisamente a decomposição (3.32), a qual, por vezes, se identifica simplesmente com a sequência de operadores

$$\left\{ \left\{ A_{-n+l}, \left\{ B_{-n+l}^{-n+l+k} \right\}_{k=1}^{n-l}, \left\{ G_{-n+l}^{-n+l+k} \right\}_{k=1}^{n-l}, B_{-n+l}^1, G_{-n+l}^1 \right\}_{l=1}^n, T_0 \right\}. \quad (3.33)$$

Tal como no caso da representação não-standard, fixadas as bases  $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  de  $W_j$  e  $\{\varphi_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  de  $V_0$ , a cada um dos operadores  $A_j, B_j^\ell, G_j^\ell$  vai corresponder uma matriz que, uma vez mais, denotaremos pela correspondente letra caligráfica. Dispondo essas matrizes como blocos de uma matriz, do modo como se apresenta na Fig. 3.4 (ilustrada para o caso  $n = 3$ ), obtém-se a representação matricial da forma standard de  $T \sim T_{-n}$ .

### 3.2.2 Construção a partir da forma não-standard

As matrizes  $\mathcal{A}_j$  e  $\mathcal{T}_0$  são as mesmas que as referidas no caso da forma não-standard.

$\mathcal{T}_0$	$\mathcal{G}_0^1$	$\mathcal{G}_{-1}^1$	$\mathcal{G}_{-2}^1$
$\mathcal{B}_0^1$	$\mathcal{A}_0$	$\mathcal{G}_{-1}^0$	$\mathcal{G}_{-2}^0$
$\mathcal{B}_{-1}^1$	$\mathcal{B}_{-1}^0$	$\mathcal{A}_{-1}$	$\mathcal{G}_{-2}^{-1}$
$\mathcal{B}_{-2}^1$	$\mathcal{B}_{-2}^0$	$\mathcal{B}_{-2}^{-1}$	$\mathcal{A}_{-2}$

Figura 3.4: Representação matricial na forma standard de  $T_{-3}$ .

Vejamos agora como poderemos, a partir do conhecimento das matrizes  $\mathcal{B}_j$  e  $\mathcal{G}_j$  da forma não-standard, obter as matrizes  $\mathcal{B}_j^\ell$ ,  $\mathcal{G}_j^\ell$ ;  $\ell > j$ , necessárias para a construção da forma matricial standard de  $T$ .

Começemos por analisar o caso de um bloco da forma

$$\mathcal{B}_j^{j+1} := \left( \beta_{k,k'}^{\{j,j+1\}} \right); \quad j+1 \leq 0.$$

Tem-se

$$\begin{aligned}
\beta_{k,k'}^{\{j,j+1\}} &= \langle T\psi_{j+1,k'}, \psi_{j,k} \rangle \\
&= \left\langle T \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m \varphi_{j,2k'+m} \right), \psi_{j,k} \right\rangle \quad (\text{veja a fórmula (2.47)}) \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m \langle T\varphi_{j,2k'+m}, \psi_{j,k} \rangle \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m \beta_{k,2k'+m}^j,
\end{aligned}$$

onde  $\beta_{k,k'}^j$  é dado por (3.13), ou seja, é o elemento na posição  $(k, k')$  da matriz  $\mathcal{B}_j$ .

Vemos, assim, que cada linha da matriz  $\mathcal{B}_j^{j+1}$  pode ser obtida considerando a correspondente linha da matriz  $\mathcal{B}_j$  da forma não-standard e aplicando-lhe um passo da transformada rápida, utilizando apenas a sequência  $g_k$ ; veja a fórmula (2.49).

No que respeita aos elementos de um bloco da forma  $\mathcal{B}_j^{j+2}$ , tem-se

$$\begin{aligned}
\beta_{k,k'}^{\{j,j+2\}} &= \langle T\psi_{j+2,k'}, \psi_{j,k} \rangle \\
&= \left\langle T \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m \varphi_{j+1,2k'+m} \right), \psi_{j,k} \right\rangle \\
&= \left\langle T \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m \sum_{p \in \mathbb{Z}} h_p \varphi_{j,2(2k'+m)+p} \right), \psi_{j,k} \right\rangle \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m \sum_{p \in \mathbb{Z}} h_p \langle T\varphi_{j,2(2k'+m)+p}, \psi_{j,k} \rangle
\end{aligned}$$

ou seja, temos

$$\beta_{k,k'}^{\{j,j+2\}} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m S_{k,2k'+m}^{\{j,j+1\}}, \quad (3.34)$$

onde

$$S_{k,2k'+m}^{\{j,j+1\}} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} h_p \beta_{k,2(2k'+m)+p}^j. \quad (3.35)$$

O processo pode, naturalmente, repetir-se, sendo claro que a obtenção de cada uma das linhas de  $\mathcal{B}_j^l$  poderá fazer-se segundo o esquema da Fig. 3.5.

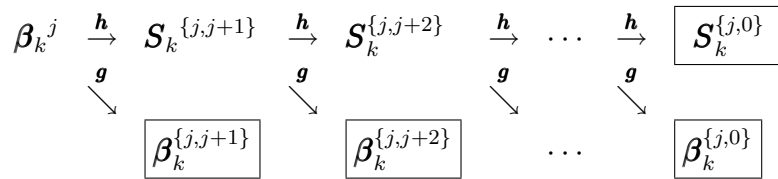


Figura 3.5: Esquema de cálculo da linha  $k$  das matrizes  $\mathcal{B}_j^l$

Note-se que os elementos de  $\mathcal{B}_j^1$  são simplesmente dados por

$$\beta_{k,k'}^{\{j,1\}} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m S_{k,2k'+m}^{\{j,-1\}} = S_{k,k'}^{\{j,0\}}.$$

É também fácil de verificar que, para o cálculo dos elementos de  $\mathcal{G}_j^\ell$ , se deverá proceder de modo totalmente análogo, mas transformando as colunas de  $\mathcal{G}_j$ . Por exemplo, para o elemento  $\gamma_{k,k'}^{\{j,j+1\}}$  na posição  $(k, k')$  da matriz  $\mathcal{G}_j^{j+1}$ , vem

$$\begin{aligned}\gamma_{k,k'}^{\{j,j+1\}} &= \langle T\psi_{j,k'}, \psi_{j+1,k} \rangle \\ &= \left\langle T\psi_{j,k'}, \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m \varphi_{j,2k+m} \right\rangle \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m \langle T\psi_{j,k'}, \varphi_{j,2k+m} \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m \gamma_{2k+m,k'}^j,\end{aligned}$$

o que mostra que a  $k'$ -ésima coluna de  $\mathcal{G}_j^{j+1}$  se obtém aplicando um passo da transformada rápida à  $k'$ -ésima coluna de  $\mathcal{G}_j$ .

É imediato reconhecer que a representação matricial standard de  $T_{-n}$  é simplesmente a representação desse operador relativamente à base de  $V_{-n}$  obtida pela junção das bases ortonormadas de cada um dos subespaços da decomposição  $V_{-n} = V_0 \overset{\perp}{\oplus} W_0 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} W_{-n+1}$ , isto é, relativamente à base:

$$\{\{\varphi_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}, \{\psi_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}, \{\psi_{1,k} : k \in \mathbb{Z}\}, \dots, \{\psi_{-n+1,k} : k \in \mathbb{Z}\}\}.$$

Por esse motivo, para obter (uma aproximação) para a imagem  $Tf$  de um elemento  $f \in L^2(\mathbb{R})$  haverá apenas que calcular o vector contendo os coeficientes de  $P_{-n}f$  nessa mesma base e pré-multiplicá-lo pela matriz da forma standard. Dever-se-á, então:

1. calcular, primeiramente,  $P_{-n}f$ , ou seja, encontrar a sequência inicial  $\mathbf{s}^{-n}$  dos seus coeficientes na base  $\{\varphi_{-n,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ ; ver, a este propósito, as observações contidas na Secção 2.4.3;
2. usar o algoritmo da transformada rápida para obter as sequências dos coeficientes de  $P_{-n}f$  em cada uma das bases  $\{\varphi_{0,k}\}, \{\psi_{0,k}\}, \{\psi_{1,k}\}, \dots, \{\psi_{-n+1,k}\}$ , isto é, as sequências  $\mathbf{s}^0, \mathbf{d}^0, \mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^{-n+1}$ ;

3. pré-multiplicar o vector  $(\mathbf{s}^0, \mathbf{d}^0, \mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^{-n+1})^T$  pela matriz da forma standard de  $T_{-n}$  de modo a obter um vector  $(\hat{\mathbf{s}}^0, \hat{\mathbf{d}}^0, \hat{\mathbf{d}}^1, \dots, \hat{\mathbf{d}}^{-n+1})^T$
4. usar a transformada rápida inversa aplicada ao vector anterior para obter, finalmente, a sequência  $\hat{\mathbf{s}}^{-n}$  dos coeficientes de  $P_{-n}f$  na base  $\{\varphi_{-n,k}\}$ .

### Nota 3.3

1. É importante salientar que a matriz da forma não-standard não é a matriz de  $T_{-n}$  em relação a qualquer base de  $V_{-n}$ ; basta reparar, por exemplo, que no caso de trabalharmos com ôndulas periodizadas, será  $\dim V_{-n} = 2^n$ , sendo a matriz da forma não-standard uma matriz quadrada de ordem  $2(2^n - 1)$ ; ver (3.24). É por esse motivo que o uso dessa matriz para determinar a imagem, pelo operador  $T$ , de uma certa função  $f$  necessita de seguir os passos indicados na Secção 3.1.2, não sendo tão simples como no caso do uso da forma standard.
2. Olhando para as duas representações de operadores estudadas, forma não-standard e standard, verifica-se que na primeira as diferentes escalas apresentam-se separadas hierarquicamente, enquanto na segunda existe uma “mistura” de escalas diferentes. Essa separação das escalas associada à forma não-standard pode constituir, para certas aplicações, uma das grandes vantagens desta representação.

## Capítulo 4

# Forma Não-standard de Operadores Diferenciais

Neste capítulo, estudamos a construção da forma não-standard, relativa a ôndulas de suporte compacto, de operadores diferenciais, com especial destaque para o caso  $\frac{d}{dx}$ , mostrando como, nesse caso, ela pode ser obtida a partir da resolução de um pequeno sistema de equações; os resultados aqui apresentados são retirados, essencialmente, do artigo [Bey92]; ver também [BCR92] e [Bey94].

### 4.1 Matriz inicial para o operador $\frac{d}{dx}$

Tal como vimos no capítulo anterior, para a construção da forma não-standard de um operador, necessitamos de calcular, os elementos  $\alpha_{k,k'}^j$ ,  $\beta_{k,k'}^j$  e  $\gamma_{k,k'}^j$  das diferentes matrizes  $\mathcal{A}^j$ ,  $\mathcal{B}^j$  e  $\mathcal{G}^j$ ;  $j = -n + 1, \dots, 0$  e ainda os elementos  $s_{k,k'}^0$  da matriz  $\mathcal{T}_0$  que representa o operador no espaço  $V_0$ . Para o operador  $d/dx$ , esses elementos satisfazem:

$$\alpha_{k,k'}^j = 2^{-j} \alpha_{k-k'}, \quad \beta_{k,k'}^j = 2^{-j} \beta_{k-k'}, \quad (4.1)$$

$$\gamma_{k,k'}^j = 2^{-j} \gamma_{k-k'}, \quad s_{k,k'}^j = 2^{-j} r_{k-k'}, \quad (4.2)$$

onde  $\alpha_l$ ,  $\beta_l$ ,  $\gamma_l$  e  $r_l$  são dados por

$$\alpha_l = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-l) \frac{d}{dx} \psi(x) dx, \quad (4.3)$$

$$\beta_l = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-l) \frac{d}{dx} \varphi(x) dx, \quad (4.4)$$

$$\gamma_l = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-l) \frac{d}{dx} \psi(x) dx, \quad (4.5)$$

$$r_l = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-l) \frac{d}{dx} \varphi(x) dx. \quad (4.6)$$

Vamos apenas demonstrar o resultado relativo aos elementos  $\alpha_{k,k'}^j$ , sendo o processo de demonstração dos restantes totalmente análogo.

Tem-se

$$\begin{aligned} \alpha_{k,k'}^j &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(x) \frac{d}{dx} \psi_{j,k'}(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k) \frac{d}{dx} (2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k')) \\ &= 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(2^{-j}x - k) 2^{-j} \frac{d\psi}{dx} (2^{-j}x - k') dx \\ &= 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u - (k - k')) \frac{d\psi}{du}(u) du \\ &= 2^{-j} \alpha_{k-k'}, \end{aligned}$$

como pretendíamos mostrar.

Suponhamos agora que escolhemos para  $\psi$  a ôndula de Daubechies  $\psi_M$  com  $M \geq 1$  momentos nulos. Nesse caso, a função escala  $\varphi = \varphi_M$  e a ôndula  $\psi$  têm ambas suporte no intervalo  $[0, L-1]$ ,  $L = 2M$ , e satisfazem as equações (2.58) e (2.60), respectivamente, isto é, tem-se

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{l=0}^{L-1} h_l \varphi(2x-l) \quad (4.7)$$

e

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{l=0}^{L-1} g_l \varphi(2x-l). \quad (4.8)$$

Das equações anteriores obtêm-se facilmente as seguintes expressões para  $\alpha_l$ ,  $\beta_l$ ,  $\gamma_l$  e  $r_l$ :

$$\alpha_l = 2 \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} g_k g_{k'} r_{2l+k-k'}, \quad (4.9)$$

$$\beta_l = 2 \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} g_k h_{k'} r_{2l+k-k'}, \quad (4.10)$$

$$\gamma_l = 2 \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} h_k g_{k'} r_{2l+k-k'}, \quad (4.11)$$

$$r_l = 2 \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} h_k h_{k'} r_{2l+k-k'}. \quad (4.12)$$

Façamos a verificação do resultado (4.9):

$$\begin{aligned} \alpha_l &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-l) \frac{d}{dx} \psi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} g_k \varphi(2(x-l)-k) \right) \left( \sqrt{2} \sum_{k'=0}^{L-1} g_{k'} \frac{d}{dx} (\varphi(2x-k')) \right) dx \\ &= 2 \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} g_k g_{k'} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2(x-l)-k) 2 \frac{d\varphi}{dx} (2x-k') dx \\ &= 2 \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} g_k g_{k'} \int \varphi(u - (2l+k-k')) \frac{d}{du} \varphi(u) du \\ &= 2 \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} g_k g_{k'} r_{2l+k-k'}. \end{aligned}$$

Os resultados (4.10)–(4.12) estabelecem-se de forma totalmente idêntica.

Vemos, assim, que a forma não-standard do operador  $d/dx$  fica completamente determinada através do cálculo dos valores  $r_l$  dados por (4.6). Em [Bey92, Proposition 1], os autores mostram como, trabalhando com ôndulas de suporte compacto, esses coeficientes podem ser obtidos facilmente resolvendo um simples sistema de equações lineares. Antes de apresentarmos o resultado de [Bey92], é conveniente fazer algumas observações.



Aplicando a fórmula de Parseval (1.18) à expressão de  $r_l$  dada por (4.6) e tendo também em conta a definição dos operadores (1.20) e (1.22), bem como os resultados (1.19) e (1.23), obtém-se uma nova expressão para os valores  $r_l$ , em termos da transformada de Fourier de  $\varphi$ :

$$\begin{aligned}
r_l &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-l) \frac{d}{dx} \varphi(x) dx \\
&= \langle T_l \varphi(x), \varphi^{(1)}(x) \rangle \\
&= \langle \widehat{T_l \varphi(x)}, \widehat{\varphi^{(1)}(x)} \rangle \\
&= \langle E_{-l} \widehat{\varphi}(\xi), (i\xi) \widehat{\varphi}(\xi) \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-il\xi} \widehat{\varphi}(\xi) \overline{(i\xi) \widehat{\varphi}(\xi)} d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (-i\xi) |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 e^{-il\xi} d\xi.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Introduzamos também a seguinte definição.

**Definição 4.1** *Dado o filtro  $\{h_k : k = 0, \dots, L-1\}$  da função escala  $\varphi$ , chamam-se coeficientes de auto-correlação desse filtro às quantidades  $a_n$ ;  $n = 1, \dots, L-1$  definidas por*

$$a_n := 2 \sum_{i=0}^{L-1-n} h_i h_{i+n}, \quad n = 1, \dots, L-1. \tag{4.14}$$

Relembrando o resultado (2.17) estabelecido para o filtro de qualquer função de transferência de uma ôndula ortogonal, concluímos de imediato que

$$\sum_{k=0}^{L-1} h_k^2 = 1, \tag{4.15}$$

e que os coeficientes de auto-correlação definidos por (4.14) são nulos quando o seu índice é par, isto é

$$a_{2k} = 0; \quad k = 1, \dots, L/2 - 1. \tag{4.16}$$

Apresentamos agora a já referida proposição contida em [BCR91].

**Proposição 4.1** (i) *Se os integrais em (4.6) ou (4.13) existem, então os coeficientes  $r_l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , definidos em (4.6), satisfazem o seguinte sistema de equações:*

$$r_l = 2 \left[ r_{2l} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} (r_{2l-2k+1} + r_{2l+2k-1}) \right], \quad (4.17)$$

e

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} r_l = 0, \quad (4.18)$$

onde  $a_n$  são os coeficientes de auto-correlação do filtro  $\{h_k\}$  de  $\varphi$ , dados por (4.14).

(ii) *Se  $M \geq 2$ , então os integrais em (4.13) existem e os coeficientes  $r_l$  satisfazem, para além das equações (4.17) – (4.18), as seguintes equações*

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} l r_l = -1. \quad (4.19)$$

Neste caso, as equações (4.17)–(4.19) têm solução única com um número finito de coeficientes  $r_l$  não nulos. Mais precisamente, tem-se

$$r_l = 0 \quad \text{para } |l| > L - 2. \quad (4.20)$$

Além disso, tem-se também

$$r_l = -r_{-l}, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (4.21)$$

**Demonstração:**

(i) Considerando a expressão dos  $r_l$ 's dada por (4.12)

$$r_l = 2 \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} h_k h_{k'} r_{2l+k-k'},$$

e efectuando a mudança de variável  $k' = k - m$ , vem

$$r_l = 2 \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{m=k}^{k-L+1} h_k h_{k-m} r_{2l+m}. \quad (4.22)$$

A expressão (4.17) obtém-se facilmente da equação anterior, efectuando uma troca da ordem dos somatórios e usando (4.15) e (4.16).

Demonstremos, agora a condição (4.18).

Começemos, primeiro, por notar que, sendo  $H(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{L-1} h_k e^{-ik\xi}$  a expressão da função de transferência de  $\varphi$ , então

$$|H(\xi)|^2 = H(\xi) \overline{H(\xi)} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} h_k h_l e^{i(k-l)\xi},$$

ou seja, tem-se

$$\begin{aligned} |H(\xi)|^2 &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=0}^{L-1} h_k^2 + (h_0 h_1 + h_1 h_2 + \cdots + h_{L-2} h_{L-1})(e^{i\xi} + e^{-i\xi}) \right. \\ &\quad + (h_0 h_2 + h_1 h_3 + \cdots + h_{L-3} h_{L-1})(e^{2i\xi} + e^{-2i\xi}) \\ &\quad \left. + \cdots + h_0 h_{L-1}(e^{i(L-1)\xi} + e^{-i(L-1)\xi}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=0}^{L-1} h_k^2 + \sum_{n=1}^{L-1} 2 \sum_{l=0}^{L-1-n} h_l h_{l+n} \cos(n\xi) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=0}^{L-1} h_k^2 + \sum_{n=1}^{L-1} a_n \cos(n\xi) \right], \end{aligned}$$

pelo que, atendendo a (4.15) e (4.16), se obtém a seguinte expressão para  $|H(\xi)|^2$ :

$$|H(\xi)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} \cos((2k-1)\xi). \quad (4.23)$$

Multiplicando agora a expressão (4.17) por  $e^{il\xi}$  e somando em  $l$ , vem

$$\sum_l r_l e^{il\xi} = 2 \left[ \sum_l r_{2l} e^{il\xi} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} \left( \sum_l r_{2l-2k+1} e^{il\xi} + \sum_l r_{2l+2k-1} e^{il\xi} \right) \right]. \quad (4.24)$$

Introduzindo as notações

$$\widehat{r}(\xi) = \sum_l r_l e^{il\xi} \quad (4.25)$$

e

$$\widehat{r}_{par}\left(\frac{\xi}{2}\right) = \sum_l r_{2l} e^{il\xi}, \quad \widehat{r}_{impar}\left(\frac{\xi}{2}\right) = \sum_l r_{2l+1} e^{i(2l+1)\frac{\xi}{2}}, \quad (4.26)$$

e tendo em atenção que

$$e^{il\xi} = e^{i(2l-2k+1)\frac{\xi}{2}} e^{i(2k-1)\frac{\xi}{2}} = e^{i(2l+2k-1)\frac{\xi}{2}} e^{-i(2k-1)\frac{\xi}{2}},$$

vemos que a equação (4.24) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \widehat{r}(\xi) &= 2 \left[ \widehat{r}_{par}\left(\frac{\xi}{2}\right) + \frac{1}{2} \widehat{r}_{impar}\left(\frac{\xi}{2}\right) \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} \left( e^{i(2k-1)\frac{\xi}{2}} + e^{-i(2k-1)\frac{\xi}{2}} \right) \right] \\ &= 2 \left[ \widehat{r}_{par}\left(\frac{\xi}{2}\right) + \widehat{r}_{impar}\left(\frac{\xi}{2}\right) \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} \cos\left((2k-1)\frac{\xi}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Por outro lado, tem-se

$$\begin{aligned} \widehat{r}\left(\frac{\xi}{2}\right) &= \sum_l r_{2l} e^{i2l\frac{\xi}{2}} + \sum_l r_{2l+1} e^{i(2l+1)\frac{\xi}{2}} \\ &= \sum_l r_{2l} e^{il\xi} + \sum_l r_{2l+1} e^{i(2l+1)\frac{\xi}{2}} \\ &= \widehat{r}_{par}\left(\frac{\xi}{2}\right) + \widehat{r}_{impar}\left(\frac{\xi}{2}\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \widehat{r}\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) &= \sum_l r_l e^{il(\frac{\xi}{2} + \pi)} \\ &= \sum_l r_{2l} e^{i2l(\frac{\xi}{2} + \pi)} + \sum_l r_{2l+1} e^{i(2l+1)(\frac{\xi}{2} + \pi)} \\ &= \sum_l r_{2l} e^{il\xi} - \sum_l r_{2l+1} e^{i(2l+1)\frac{\xi}{2}} \\ &= \widehat{r}_{par}\left(\frac{\xi}{2}\right) - \widehat{r}_{impar}\left(\frac{\xi}{2}\right). \end{aligned}$$

Desta forma tem-se,

$$\widehat{r}\left(\frac{\xi}{2}\right) + \widehat{r}\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) = 2\widehat{r}_{par}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (4.28)$$

e

$$\widehat{r}\left(\frac{\xi}{2}\right) - \widehat{r}\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) = 2\widehat{r}_{impar}\left(\frac{\xi}{2}\right). \quad (4.29)$$

Usando as expressões (4.28) e (4.29) vem que (4.27) pode ser escrita como,

$$\widehat{r}(\xi) = \widehat{r}\left(\frac{\xi}{2}\right) + \widehat{r}\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) + \left(\widehat{r}\left(\frac{\xi}{2}\right) - \widehat{r}\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)\right) \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} \left(\cos\left((2k-1)\frac{\xi}{2}\right)\right),$$

ou ainda, fazendo uso do resultado (4.23), como

$$\widehat{r}(\xi) = \widehat{r}\left(\frac{\xi}{2}\right) + \widehat{r}\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) + \left(2|H\left(\frac{\xi}{2}\right)|^2 - 1\right) \left(\widehat{r}\left(\frac{\xi}{2}\right) - \widehat{r}\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)\right). \quad (4.30)$$

Mas, como

$$|H\left(\frac{\xi}{2}\right)|^2 + |H\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)|^2 = 1,$$

vem

$$\begin{aligned} \widehat{r}(\xi) &= \widehat{r}\left(\frac{\xi}{2}\right) + \widehat{r}\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) + \left(|H\left(\frac{\xi}{2}\right)|^2 - |H\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)|^2\right) \left(\widehat{r}\left(\frac{\xi}{2}\right) - \widehat{r}\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)\right) \\ &= \left(1 - |H\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)|^2 + |H\left(\frac{\xi}{2}\right)|^2\right) \widehat{r}\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ &\quad + \left(1 - |H\left(\frac{\xi}{2}\right)|^2 + |H\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)|^2\right) \widehat{r}\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \\ &= 2 \left(|H\left(\frac{\xi}{2}\right)|^2 \widehat{r}\left(\frac{\xi}{2}\right) + |H\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)|^2 \widehat{r}\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)\right). \end{aligned}$$

Recorrendo ao resultado (2.15), vem

$$\widehat{r}(0) = 2\widehat{r}(0),$$

ou seja,

$$\widehat{r}(0) = 0.$$

Recordando a definição de  $\widehat{r}(\xi)$ , conclui-se imediatamente que

$$\sum_l r_l = 0.$$

(ii) No já referido artigo [Dau88], Daubechies demonstra que, se  $M \geq 2$ , então é válida a seguinte expressão de decaimento para  $\widehat{\varphi}(\xi)$ :

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-1-\epsilon}, \quad \epsilon > 0; \quad (4.31)$$

veja também [Dau92, p.225-226]. Esta condição garante, assim, a convergência absoluta dos integrais em (4.13).

Para estabelecer (4.19), fazemos uso do seguinte resultado, válido se a ôndula tem pelo menos  $M = 2$  momentos nulos, e cuja demonstração pode ser vista em, e.g. [SP94] :

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} l \varphi(x - l) = x - \mu_1, \quad (4.32)$$

onde  $\mu_1$  designa o momento de ordem 1 de  $\varphi$ , isto é,  $\mu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx$ . Usando a definição dos  $r_l$ 's dada por (4.6), vem então

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathbb{Z}} l r_l &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l \in \mathbb{Z}} l \varphi(x - l) \frac{d}{dx} \varphi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_1) \frac{d}{dx} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes e tendo em atenção que a função  $\varphi$  tem suporte compacto, vem

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} l r_l = - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = -1,$$

como queríamos mostrar.

A existência de solução para o sistema formado pelas equações (4.17) – (4.19) é uma consequência imediata da já referida convergência dos integrais em (4.13).

A unicidade de tal solução pode estabelecer-se a partir da unicidade da representação do operador  $\frac{d}{dx}$ .

Sejam  $\hat{r}_l; l \in \mathbb{Z}$ , solução das equações (4.17)–(4.19) e consideremos, para cada  $j$ , o operador  $\hat{T}_j : V_j \longrightarrow V_j$  definido usando os coeficientes  $\hat{r}_l$ , de uma forma análoga à que é usada para definir  $T_j = P_j T P_j$ , à custa dos  $r_l$ 's:

$$\begin{aligned}\hat{T}_j f(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{k' \in \mathbb{Z}} 2^{-j} \hat{r}_{k-k'} \langle f, \varphi_{j,k'} \rangle \right) \varphi_{j,k}(x) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( 2^{-j} \sum_{k' \in \mathbb{Z}} \hat{r}_{k'} f_{j,k-k'} \right) \varphi_{j,k}(x),\end{aligned}\tag{4.33}$$

onde

$$\begin{aligned}f_{j,k-k'} &= \langle f, \varphi_{j,k-k'} \rangle \\ &= 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(2^{-j}x - k + k') dx \\ &= 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(u - 2^j k') \varphi(u^{-j}x - k) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u - 2^j k') \varphi_{j,k}(u) du.\end{aligned}$$

Supondo que  $f$  é suficientemente diferenciável e expandindo  $f(u - 2^j k')$  em torno do ponto  $u$ , vem:

$$f_{j,k-k'} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( f(u) - 2^j k' f'(u) + \frac{2^{2j} (k')^2}{2} f''(\mu) \right) \varphi_{j,k}(u) du,$$

onde  $|\mu - u| \leq 2^j k'$ .

Substituindo a expressão anterior em (4.33), vem

$$\begin{aligned}\hat{T}_j f(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[ 2^{-j} \sum_{k' \in \mathbb{Z}} \hat{r}_{k'} \int_{-\infty}^{\infty} \left( f(u) - 2^j k' f'(u) + \frac{2^{2j} (k')^2}{2} f''(\mu) \right) \varphi_{j,k}(u) du \right] \varphi_{j,k}(x) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[ 2^{-j} \sum_{k' \in \mathbb{Z}} \hat{r}_{k'} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \varphi_{j,k}(u) du - \sum_{k' \in \mathbb{Z}} k' \hat{r}_{k'} \int_{-\infty}^{\infty} f'(u) \varphi_{j,k}(u) du \right. \\ &\quad \left. + 2^j \sum_{k' \in \mathbb{Z}} \frac{(k')^2 \hat{r}_{k'}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f''(\mu) \varphi_{j,k}(u) du \right] \varphi_{j,k}(x)\end{aligned}$$

Uma vez que os coeficientes  $\hat{r}_l$  satisfazem as equações (4.18) e (4.19), tem-se, simplesmente

$$\begin{aligned}\hat{T}_j f(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f'(u) \varphi_{j,k}(u) du \right) \varphi_{j,k}(x) \\ &\quad + 2^j \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{k' \in \mathbb{Z}} \frac{(k')^2 \hat{r}_{k'}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f''(\mu) \varphi_{j,k}(\mu) d\mu \right) \varphi_{j,k}(x).\end{aligned}\quad (4.34)$$

É então fácil de concluir que quando  $j \rightarrow -\infty$  os operadores  $\hat{T}_j$  e  $\frac{d}{dx}$  coincidem. Como o mesmo se passa para os operadores  $T_j$ , sendo a representação de  $\frac{d}{dx}$  única, podemos concluir que os coeficientes  $\hat{r}_l$ , solução das equações (4.17)–(4.18), são necessariamente os coeficientes  $r_l$  dados por (4.6).

Como  $\varphi$  tem suporte no intervalo  $[0, L - 1]$ , segue-se de imediato da definição (4.11) dos coeficientes  $r_l$

$$r_l = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x - l) \frac{d}{dx} \varphi(x) dx,$$

que serão nulos todos os coeficientes  $r_l$  para  $l < -L + 2$  ou  $l > L - 2$ .

Por outro lado, substituindo  $l$  por  $-l$  na expressão dos coeficientes  $r_l$  dada por (4.13), obtém-se  $r_{-l} = -r_l$ , o que estabelece (4.21). ■

#### Nota 4.1

1. Existe uma relação simples entre os coeficientes  $\gamma_l$  e os coeficientes  $\beta_l$ :

$$\gamma_l = -\beta_{-l}. \quad (4.35)$$



Com efeito, tem-se

$$\begin{aligned}
\gamma_l &= 2 \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} h_k g_{k'} r_{2l+k-k'} \\
&= -2 \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} h_k g_{k'} r_{-2l-k+k'} \quad (\text{usando a relação (4.21)}) \\
&= -2 \sum_{k'=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{L-1} g_{k'} h_k r_{-2l+k'-k} = -\beta_{-l}.
\end{aligned}$$

2. O cálculo de  $\alpha_l$  pode ser obtido por uma expressão mais simples do que a dada em (4.9), usando os coeficientes de correlação

$$b_m = 2 \sum_{k=0}^{L-1-m} g_k g_{k+m}; m = 1, \dots, L-1.$$

Para obter essa expressão, comece-se, então, por escrever

$$\alpha_l = 2 \sum_k \sum_{k'} g_k g_{k'} r_{2l+k-k'}$$

na forma

$$\alpha_l = 2 \left( \sum_k g_k^2 r_{2l} + \frac{1}{2} \sum_m b_m (r_{2l-m} + r_{2l+m}) \right) \quad (4.36)$$

Por (2.59),

$$b_m = 2 \sum_{k=0}^{L-1-m} (-1)^m h_{L-k-1} h_{L-k-m-1}$$

e, efectuando uma mudança de variável, vem

$$\begin{aligned}
b_m &= 2 (-1)^m \sum_{l=m}^{L-1} h_l h_{l-m} \\
&= 2 (-1)^m \sum_{l=0}^{L-1-m} h_{l+m} h_l \\
&= (-1)^m a_m
\end{aligned}$$

onde  $a_m$  são os coeficientes de auto-correlação  $\{h_k\}$ . Note-se ainda que, tendo em conta (2.59) e (2.17),

$$\sum_{l=0}^{L-1} g_l^2 = \sum_{l=0}^{L-1} h_{L-l-1}^2 = 1.$$

Assim, (4.36) pode ser escrita como,

$$\begin{aligned} \alpha_l &= 2r_{2l} + \sum_{m=1}^{L-1} (-1)^m a_m (r_{2l-m} + r_{2l+m}) \\ &= 2r_{2l} + \sum_{m=1}^{L-1} (-1)^m a_m (r_{2l-m} + r_{2l+m}) \end{aligned}$$

e usando agora (4.16), vem

$$\begin{aligned} \alpha_l &= 2r_{2l} + \sum_{k=1}^{L/2} (-1)^{2k-1} a_{2k-1} (r_{2l-2k+1} + r_{2l+2k-1}) \\ &= 2r_{2l} - \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} (r_{2l-2k+1} + r_{2l+2k-1}) \end{aligned}$$

Por (4.17), tem-se finalmente o resultado:

$$\alpha_l = 2r_{2l} + (2r_{2l} - r_l) = 4r_{2l} - r_l. \quad (4.37)$$

3. Também a expressão dos coeficientes  $\beta_l$  pode ser simplificada, usando os coeficientes de correlação

$$c_m = 2 \sum_{k=0}^{L-1-m} g_k h_{k+m} \quad \text{e} \quad d_m = 2 \sum_{k=0}^{L-1-m} h_k g_{k+m}.$$

Tem-se

$$\begin{aligned} \beta_l &= 2 \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{k'=0}^{L-1} g_k h_{k'} r_{2l+k-k'} \\ &= 2 \sum_{k=0}^{L-1} g_k h_k r_{2l} + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{L-1} c_m r_{2l-m} + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{L-1} d_m r_{2l+m} \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{L-1} g_k h_k &= \sum_{k=0}^{L-1} (-1)^k h_{L-1-k} h_k \\
&= \sum_{k=0}^{L/2-1} (-1)^k h_{L-1-k} h_k + \sum_{k=L/2}^{L-1} (-1)^k h_{L-1-k} h_k \\
&= \sum_{k=0}^{L/2-1} (-1)^k h_{L-1-k} h_k + \sum_{k=0}^{L/2-1} (-1)^{L-1-k} h_k h_{L-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{L/2-1} (-1)^k h_{L-1-k} h_k - \sum_{k=0}^{L/2-1} (-1)^k h_k h_{L-1-k} = 0,
\end{aligned}$$

donde,

$$\beta_l = \sum_{m=0}^{L-1} c_m r_{2l-m} + \sum_{m=0}^{L-1} d_m r_{2l+m}, \quad (4.38)$$

onde

$$c_m = 2 \sum_{k=0}^{L-1-m} g_k h_{k+m} = \sum_{k=0}^{L-1} (-1)^k h_{L-1-k} h_{k+m} \quad (4.39)$$

e

$$d_m = 2 \sum_{k=0}^{L-1-m} h_k g_{k+m} = \sum_{k=0}^{L-1} (-1)^{k+m} h_k h_{L-1-k-m}. \quad (4.40)$$

As expressões (4.37), (4.38) e (4.35) dos coeficientes  $\alpha_l$ ,  $\beta_l$  e  $\gamma_l$ , em termos dos valores  $r_l$  e a condição (4.20) mostram que

$$\omega_l = 0; \quad |l| > L-2, \quad \omega = \alpha, \beta, \gamma. \quad (4.41)$$

Assim sendo, podemos concluir de (4.1)–(4.2) que os elementos das matrizes  $\mathcal{A}_j$ ,  $\mathcal{B}_j$  e  $\mathcal{G}_j$  satisfazem

$$\omega_{k,k'} = 0; \quad |k - k'| > L-2, \quad \omega = \alpha, \beta, \gamma. \quad (4.42)$$

Por outras palavras, estas matrizes serão matrizes banda, de largura de banda  $2L - 3$ .

## Periodização

No caso de serem usadas ôndulas periodizadas, os elementos  $\tilde{\alpha}_{k,k'}^j$ ,  $\tilde{\beta}_{k,k'}^j$ ,  $\tilde{\gamma}_{k,k'}^j, \tilde{s}_{k,k'}^j$ ;  $k, k' = 0, 1, \dots, 2^{-j} - 1$ , das respectivas matrizes  $\tilde{\mathcal{A}}_j$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}_j$ ,  $\tilde{\mathcal{G}}_j$ , e  $\tilde{\mathcal{T}}_j$ , são obtidos de forma muito simples, a partir dos correspondentes elementos  $\alpha_{k,k'}^j$ ,  $\beta_{k,k'}^j$ ,  $\gamma_{k,k'}^j$  e  $s_{k,k'}^j$ :

$$\tilde{\alpha}_{k,k'}^j = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{k,k'+2^{-j}p}^j, \quad \tilde{\beta}_{k,k'}^j = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \beta_{k,k'+2^{-j}p}^j, \quad (4.43)$$

$$\tilde{\gamma}_{k,k'}^j = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \gamma_{k,k'+2^{-j}p}^j, \quad \tilde{s}_{k,k'}^j = \sum_{p \in \mathbb{Z}} s_{k,k'+2^{-j}p}^j. \quad (4.44)$$

Demonstremos a relação para  $\tilde{\alpha}_{k,k'}^j$  (a demonstração das restantes é totalmente análoga). Tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{k,k'}^j &= \int_0^1 \tilde{\psi}_{j,k}(x) \frac{d}{dx} \tilde{\psi}_{j,k'}(x) dx \\ &= \int_0^1 \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi_{j,k}(x+l) \frac{d}{dx} \tilde{\psi}_{j,k'}(x) dx \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_l^{l+1} \psi_{j,k}(u) \frac{d}{du} \tilde{\psi}_{j,k'}(u-l) du \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_l^{l+1} \psi_{j,k}(u) \frac{d}{du} \tilde{\psi}_{j,k'}(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{j,k}(u) \frac{d}{du} \tilde{\psi}_{j,k'}(u) du \\ &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(u) \frac{d}{du} \psi_{j,k'}(u+p) du \\ &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(u) \frac{d}{du} \psi_{j,k'+2^{-j}p}(u) du \\ &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{k,k'+2^{-j}p}^j. \end{aligned}$$

Introduzamos a seguinte notação

$$|k - k'|_j := \inf_{p \in \mathbb{Z}} |k - k' - 2^{-j}p|. \quad (4.45)$$

Então, é imediato constatar que, neste caso, a condição (4.42) é substituída pela condição seguinte

$$\tilde{\omega}_{k,k'} = 0; |k - k'|_j > L - 2, \quad \omega = \alpha, \beta, \gamma. \quad (4.46)$$

## 4.2 Exemplos

Como vimos na secção anterior, para obter, em cada caso concreto, os valores  $r_l$  necessários à construção da matriz não-standard de  $\frac{d}{dx}$ , bastará utilizar a Proposição 4.1, ou seja, resolver o sistema (4.17)-(4.19).

Haverá, então, que começar por calcular, para a ôndula escolhida, os coeficientes de auto-correlação  $a_{2k-1}; k = 1, \dots, M$ , onde  $M = L/2$  é o número de momentos nulos da ôndula. No caso de usarmos ôndulas de Daubechies, a determinação destes coeficientes pode ser simplificada, usando resultados conhecidos para estas ôndulas. Em particular, tem-se o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser vista em [Dau88, p. 978] ou [LMR97, pp. 157-158].

**Proposição 4.2** *Se  $H_M(\xi)$  é a função de transferência da função escala correspondente à ôndula de Daubechies com  $M$  momentos nulos, então, tem-se*

$$|H_M(\xi)|^2 = 1 - c_M \int_0^\xi \sin^{2M-1} x dx, \quad (4.47)$$

onde

$$c_M = \left( \int_0^\pi \sin^{2M-1} x dx \right)^{-1} = \frac{\Gamma(M + 1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(M)}, \quad (4.48)$$

com  $\Gamma(x)$  designando a função gama de Euler.

Sendo  $Y(x) := \int \sin^{2M-1} x dx$ , facilmente se verifica que

$$Y(x) = \frac{1}{2^{2M-2}} \sum_{m=1}^M (-1)^m \binom{2M-1}{M+m-1} \frac{\cos((2m-1)x)}{(2m-1)}$$

Então, uma vez que  $Y(\pi) = -Y(0)$ , de (4.48), vem

$$\frac{1}{c_M} = Y(\pi) - Y(0) = -2Y(0),$$

ou seja, tem-se

$$c_M Y(0) = -\frac{1}{2}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} |H_M(\xi)|^2 &= 1 - c_M(Y(\xi) - Y(0)) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}c_M \frac{1}{2^{2M-3}} \sum_{m=1}^M (-1)^{m-1} \frac{\binom{2M-1}{M+m-1}}{(2m-1)} \cos((2m-1)\xi). \end{aligned}$$

Comparando a expressão anterior com a expressão (4.23), obtêm-se, de imediato as seguintes fórmulas para o cálculo dos coeficientes de auto-correlação

$a_{2m-1}$  :

$$a_{2m-1} = (-1)^{m-1} \frac{\binom{2M-1}{M+m-1} c_M}{(2m-1)2^{2M-3}}, \quad (4.49)$$

onde  $c_M$  são as constantes (4.48).

**Exemplo 4.1** *Se escolhermos a ôndula de Daubechies com 2 momentos nulos, isto é, sendo  $M = 2$  ( $L = 4$ ), há apenas  $2L - 3 = 5$  coeficientes  $r_l$  não nulos a determinar:  $r_{-2}, r_{-1}, r_0, r_1$  e  $r_2$ , sendo, além disso  $r_{-2} = -r_2$ ,  $r_{-1} = -r_1$  e  $r_0 = 0$ .*

*Neste caso,  $c_M = \frac{3}{4}$ ,  $a_1 = \frac{9}{8}$  e  $a_3 = -\frac{1}{8}$ . Obtém-se, assim, o seguinte sistema para a determinação dos valores  $r_1$  e  $r_2$ :*

$$\begin{cases} 2r_1 + 4r_2 = -1 \\ \frac{1}{8}r_1 + r_2 = 0, \end{cases}$$

*cuja solução é*

$$r_1 = -\frac{2}{3}, \quad r_2 = \frac{1}{12}.$$

**Exemplo 4.2** *No caso de escolhermos a ôndula com 5 momentos nulos, vem*

$$a_1 = \frac{19845}{16384}, \quad a_3 = -\frac{2205}{8192}, \quad a_5 = \frac{567}{8192}, \quad a_7 = -\frac{405}{32768}, \quad a_9 = \frac{35}{32768},$$

e o resultado, resolvendo o correspondente sistema de equações lineares, é:

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{957310976}{1159104017}, & r_2 &= \frac{265226398}{1159104017}, & r_3 &= -\frac{735232}{13780629}, \\ r_4 &= \frac{17297060}{2318208034}, & r_5 &= -\frac{1386496}{5795520085}, & r_6 &= -\frac{563818}{10431936153}, \\ r_7 &= -\frac{2048}{8113728119}, & r_8 &= -\frac{5}{18545664272}. \end{aligned}$$

Apresentamos de seguida a figura relativa à forma não-standard do operador  $d/dx$  para  $N = 256$  ( $N$  a ordem da matriz inicial) e escolhendo as ôndulas de Daubechies com 5 momentos nulos, isto é, sendo  $M = 5$ . As entradas não nulas da matriz tomam coloração preta e as nulas têm cor branca.

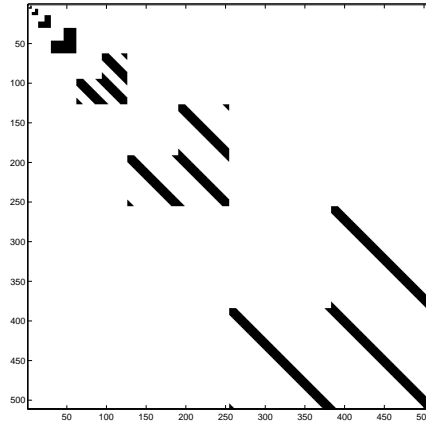


Figura 4.1: Exemplo – forma não-standard ( $N = 256$ ,  $M = 5$ )

**Nota 4.2** Para valores de  $M$  elevados, poderá ser conveniente usar um algoritmo iterativo para determinar os coeficientes  $r_l$ . Começando com uma aproximação inicial  $r_1 = 0.5$  e  $r_{-1} = -0.5$  (a qual satisfaz as equações (4.18) e (4.19)) e utilizando (4.17) sucessivamente, os coeficientes  $r_l$  vão sendo recalculados até se obter convergência (dentro de uma determinada tolerância) para a solução do sistema.

### 4.3 Operador $\frac{d^n}{dx^n}$

De forma semelhante ao operador  $d/dx$ , a forma não-standard do operador  $d^n/dx^n$  fica completamente determinada pelo conhecimento dos coeficientes

$$r_l^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-l) \frac{d^n}{dx^n} \varphi(x) dx, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (4.50)$$

ou, de outra forma,

$$r_l^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} (-i\xi)^n |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 e^{-il\xi} d\xi. \quad (4.51)$$

Uma proposição análoga à Proposição 4.1, pode também ser estabelecida facilmente para o operador  $d^n/dx^n$ ; veja [Bey92, Proposition 2].

**Proposição 4.3 (i)** *Se os integrais em (4.50) ou em (4.51) existem, então os coeficientes  $r_l^{(n)}$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , satisfazem o seguinte sistema de equações:*

$$r_l^{(n)} = 2^n \left[ r_{2l} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1} \left( r_{2l-2k+1}^{(n)} + r_{2l+2k-1}^{(n)} \right) \right], \quad (4.52)$$

e

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} l^n r_l^{(n)} = (-1)^n n!, \quad (4.53)$$

onde  $a_n$  são os coeficientes de auto-correlação do filtro  $\{h_k\}$  de  $\varphi$ , dados por (4.14).

**(ii)** *Seja  $M \geq (n+1)/2$ , onde  $M$  é o número de momentos nulos da ôndula considerada. Se os integrais em (4.50) ou (4.51) existem, então as equações (4.52) – (4.53) têm solução única com um número finito de coeficientes  $r_l^{(n)}$  não nulos. Mais precisamente, tem-se*

$$r_l^{(n)} = 0, \quad \text{para } |l| > L - 2.$$

*Para além das equações (4.52) – (4.53), os coeficientes  $r_l^{(n)}$  satisfazem ainda:*



Para  $n$  par

$$r_l^{(n)} = r_{-l}^{(n)},$$

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} l^{2m} r_l^{(n)} = 0, \quad m = 1, \dots, n/2 - 1,$$

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} r_l^{(n)} = 0.$$

Para  $n$  ímpar

$$r_l^{(n)} = -r_{-l}^{(n)},$$

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} l^{2m-1} r_l^{(n)} = 0, \quad m = 1, \dots, (n-1)/2.$$

**Nota 4.3** Em [Bey92], o autor descreve também como encontrar explicitamente a forma não-standard de outros operadores, nomeadamente operadores de convolução, operadores de derivadas fraccionárias, translações, etc.

## Capítulo 5

# Compressão de Operadores

No capítulo anterior vimos que, para o operador  $\frac{d}{dx}$ , as matrizes da forma não-standard relativas a ôndulas de suporte compacto são formadas por “grupos” de blocos dispostos ao longo da diagonal, em que cada bloco é uma matriz banda,<sup>1</sup> isto é, as matrizes obtidas são matrizes esparsas. Neste capítulo mostramos como, para outras classes de operadores, se usarmos ôndulas com um número suficiente de momentos nulos, as matrizes correspondentes se comportam, em termos práticos, de modo semelhante. Mais precisamente, vamos mostrar que os elementos de cada bloco matricial, embora não sendo nulos, tenderão a decair muito rapidamente à medida que nos afastamos da diagonal. É, então, possível transformar as matrizes resultantes em matrizes esparsas, substituindo por zero todos os elementos cujo valor absoluto seja inferior a um determinado limiar. Diremos, então, que efectuámos uma *compressão* do operador.

Para a escrita deste capítulo usámos, essencialmente, os artigos [BCR91] e [Koo93a].

---

<sup>1</sup>A largura da banda é, como vimos, dependente do número de momentos nulos da ôndula escolhida e a estrutura em banda dos blocos é, naturalmente, “deteriorada”, quando usamos a periodização.

## 5.1 Operadores de Calderón-Zygmund

Começamos por apresentar alguns resultados relativos a um determinado tipo de operadores, os chamados operadores de Calderón-Zygmund. Começemos pela definição desta classe de operadores:

**Definição 5.1** *Seja  $T$  um operador integral contínuo*

$$Tf(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y)f(y)dy, \quad (5.1)$$

*onde o núcleo  $K(x, y)$  é uma função de classe  $C^M$  ( $M$  inteiro positivo) definida no conjunto*

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}. \quad (5.2)$$

*Então  $T$  diz-se um operador de Calderón-Zygmund se existirem constantes positivas  $C_0$  e  $C_1$  tais que, para  $(x, y) \in \Omega$ ,*

$$|K(x, y)| \leq \frac{C_0}{|x - y|} \quad (5.3)$$

*e*

$$|\partial_x^M K(x, y)| + |\partial_y^M K(x, y)| \leq \frac{C_1}{|x - y|^{M+1}}. \quad (5.4)$$

No que se segue, as notações utilizadas serão as que foram introduzidas nos capítulos precedentes. Por exemplo,  $\alpha_{k,k'}^j$  denotará o elemento na posição  $(k, k')$  do bloco  $\mathcal{A}_j$  da matriz não-standard de  $T$  relativa a uma determinada AMR com função escala  $\varphi$  e ôndula  $\psi$ , isto é, será definido por (3.13), etc. Começemos por introduzir um lema, o qual serve de base à proposição subsequente.

**Lema 5.1** *Suponhamos que  $K$ , o núcleo do operador, satisfaz as estimativas (5.3) e (5.4), para  $(x, y) \in \Omega$ . Se a ôndula escolhida tiver  $M$  momentos nulos,*

então os coeficientes  $\omega_{k,k'}^j$  ( $\omega = \alpha, \beta, \gamma$ ) satisfazem as seguintes estimativas, válidas para  $|k - k'| > 2M - 1$ :

$$|\omega_{k,k'}^j| \leq 2^{j(M+1)} C_M \times \sup_{|x|, |y| \leq 2^j(M - \frac{1}{2})} \left| \partial_\mu^M K(x + 2^{-j}(k + M - \frac{1}{2}), y + 2^{-j}(k' + M - \frac{1}{2})) \right|, \quad (5.5)$$

onde  $\mu = x$  se  $\omega = \beta$ ,  $\mu = y$  se  $\omega = \gamma$  e  $\mu = x$  ou  $\mu = y$  se  $\omega = \alpha$ .

**Demonstração:** Apresentamos a demonstração para o caso  $\omega = \beta$ , sendo a demonstração dos restantes casos totalmente análoga.

Relembremos que, sendo  $\psi$  com  $M$  momentos nulos, se tem

$$\text{supp } \varphi = \text{supp } \psi = [0, 2M - 1],$$

e, portanto, tendo em conta as definições (2.1) e (2.7) de  $\psi_{j,l}$  e  $\varphi_{j,l}$ , respectivamente, tem-se

$$\text{supp } \varphi_{j,l} = \text{supp } \psi_{j,l} = [2^j l, 2^j(l + 2M - 1)].$$

Então,

$$\begin{aligned} \beta_{k,k'}^j &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) \psi_{j,k}(x) \varphi_{j,k'}(y) dx dy \\ &= 2^{-j} \int_{2^j k}^{2^j(k+2M-1)} \int_{2^j k'}^{2^j(k'+2M-1)} K(x, y) \psi(2^{-j}x - k) \varphi(2^{-j}y - k') dx dy \end{aligned}$$

e efectuando uma mudança de variável, vem

$$\beta_{k,k'}^j = 2^{-j} \iint_{|\xi|, |\eta| \leq 2^j(M - \frac{1}{2})} K(\xi_j, \eta_j) \psi(2^{-j}\xi + M - \frac{1}{2}) \varphi(2^{-j}\eta + M - \frac{1}{2}) d\xi d\eta,$$

onde introduzimos a notação

$$\xi_j = \xi + 2^j(k + M - \frac{1}{2}), \quad \eta_j = \eta + 2^j(k' + M - \frac{1}{2}).$$

Expandindo  $K$  em série de Taylor em torno do ponto  $(2^j(k + M - \frac{1}{2}), \eta_j)$  até à ordem  $M$ , e usando o facto de  $\psi$  ter  $M$  momentos nulos, vem

$$\begin{aligned} \beta_{k,k'}^j &= 2^{-j} \iint_{|\xi|, |\eta| \leq 2^j(M - \frac{1}{2})} \frac{\xi^M}{M!} \partial_\xi^M K(\theta\xi + 2^j(k + M - \frac{1}{2}), \eta_j) \times \\ &\quad \times \psi(2^{-j}\xi + M - \frac{1}{2}) \varphi(2^{-j}\eta + M - \frac{1}{2}) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

onde  $\theta = \theta(\xi, \eta) \in ]0, 1[$ . Note-se que a condição  $|k - k'| > 2M - 1$  garante a validade da expansão de  $K$  referida. Com efeito, tem-se

$$\begin{aligned} |\xi_j - \eta_j| &= |\xi + 2^j(k + M - \frac{1}{2}) - (\eta + 2^j(k' + M - \frac{1}{2}))| \\ &= |2^j(k - k') + (\xi - \eta)| \\ &\geq |2^j(k - k')| - |\xi - \eta| \\ &\geq 2^j |k - k'| - |\xi| - |\eta| \\ &\geq 2^j |k - k'| - 2^j(2M - 1) \\ &= 2^j(|k - k'| - (2M - 1)). \end{aligned}$$

Para  $|k - k'| > 2M - 1$ , ter-se-á  $|\xi_j - \eta_j| > 0$ , o que garante que  $(\xi_j, \eta_j) \in \Omega$ .

Então, tem-se

$$\begin{aligned} |\beta_{k,k'}^j| &\leq \frac{2^{-j}}{M!} \sup_{|\xi|, |\eta| \leq 2^j(M - \frac{1}{2})} |\xi^M \partial_\xi^M K(\xi_j, \eta_j)| \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \psi(2^{-j}\xi + M - \frac{1}{2}) \right| \left| \varphi(2^{-j}\eta + M - \frac{1}{2}) \right| d\xi d\eta \end{aligned}$$

e, efectuando uma mudança de variável,

$$\begin{aligned} |\beta_{k,k'}^j| &\leq 2^{j(M+1)} \sup_{|x|, |y| \leq 2^j(M - \frac{1}{2})} |\partial_x^M K(x_j, y_j)| \frac{(M - \frac{1}{2})^M}{M!} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)| dx \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(y)| dy \\ &\leq 2^{j(M+1)} C_M \sup_{|x|, |y| \leq 2^j(M - \frac{1}{2})} |\partial_x^M K(x_j, y_j)|, \end{aligned}$$

onde  $x_j = x + 2^j(k + M - \frac{1}{2})$ ,  $y_j = y + 2^j(k' + M - \frac{1}{2})$  e

$$C_M = \frac{(M - \frac{1}{2})^M}{M!} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)| dx \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(y)| dy.$$

■

No seguimento deste lema tem-se, então, a proposição seguinte:

**Proposição 5.1** *Nas condições do lema anterior, tem-se a seguinte estimativa para os elementos  $\omega_{k,k'}^j$  ( $\omega = \alpha, \beta, \gamma$ ), válida para  $|k - k'| > 2M - 1$ :*

$$|\omega_{k,k'}^j| \leq \frac{C}{(1 + |k - k'|)^{M+1}}. \quad (5.6)$$

**Demonstração:** Uma vez mais, fazemos a demonstração apenas para o caso  $\omega = \beta$ , sendo os restantes casos demonstrados de modo análogo.

Para  $|x|, |y| \leq 2^j(M - \frac{1}{2})$  e  $|k - k'| > 2M - 1$ , tem-se

$$\begin{aligned} & \left| x + 2^j(k + M - \frac{1}{2}) - (y + 2^j(k' + M - \frac{1}{2})) \right| \\ & \geq 2^j |k - k'| - 2^j(2M - 1) \\ & = \frac{2^j |k - k'| (2M + 1) - 2^j(4M^2 - 1)}{2M + 1} \\ & = \frac{2^j(1 + |k - k'|)}{2M + 1} + \frac{2^j 2M(|k - k'| - 2M)}{2M + 1} \\ & = \frac{2^j(1 + |k - k'|)}{2M + 1}. \end{aligned}$$

Assim, de (5.4) e (5.5) vem que,

$$\begin{aligned} |\beta_{k,k'}^j| & \leq 2^{j(M+1)} C_M C_2 \times \frac{(2M + 1)^{M+1}}{(2^j(1 + |k - k'|))^{M+1}} \\ & \leq \frac{C}{(1 + |k - k'|)^{M+1}}, \end{aligned}$$

onde  $C = C_2 C_M (2M + 1)^{M+1}$ , tal como se pretendia demonstrar. ■

## 5.2 Operadores em $L^2([0, 1])$

Os resultados anteriores foram obtidos para as “matrizes” relativas a operadores integrais actuando em  $L^2(\mathbb{R})$  definidos através de um núcleo  $K(x, y)$  satisfazendo certas estimativas em  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$ . Vejamos o que acontece quando o núcleo tem suporte no conjunto

$$Q := \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x \neq y\} \quad (5.7)$$

e se usam ôndulas periodizadas.

Seja, então  $T$  um operador em  $L^2([0, 1])$  definido por

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)dy,$$

onde  $K(x, y)$  é uma função de classe  $C^M$  definida no conjunto  $Q$  dado por (5.7) e satisfazendo estimativas do tipo (5.3) e (5.4), para  $(x, y) \in Q$ .

Existe uma outra forma de ver os elementos das matrizes periodizadas  $\tilde{\mathcal{A}}_j$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}_j$ ,  $\tilde{\mathcal{G}}_j$  e  $\tilde{\mathcal{T}}_j$ . Por exemplo, para os elementos  $\tilde{\alpha}_{k,k'}^j$ , tem-se

$$\tilde{\alpha}_{k,k'}^j = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}(x, y)\psi_{j,k}(x)\psi_{j,k'}(y)dx, \quad (5.8)$$

onde  $\tilde{K}(x, y)$  é a extensão periódica de período 1 (nas duas variáveis) do núcleo  $K(x, y)$ , inicialmente definido apenas no quadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ , isto é,

$$\tilde{K}(x, y) = \sum_{p,q \in \mathbb{Z}} K(x + p, y + q) = K(x - [x], y - [y]); \quad (5.9)$$

veja, a este propósito a Nota 1.3.

A demonstração de (5.8) é muito simples. Temos

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{k,k'}^j &= \int_0^1 \int_0^1 K(x, y)\tilde{\psi}_{j,k}(x)\tilde{\psi}_{j,k'}(y)dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y)\tilde{\psi}_{j,k}(x)\tilde{\psi}_{j,k'}(y)dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) \sum_p \psi_{j,k}(x + p) \sum_q \psi_{j,k'}(y + q)dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_p \sum_q K(x - p, y - q)\psi_{j,k}(x)\psi_{j,k'}(y)dx dy, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x - [x], y - [y])\psi_{j,k}(x)\psi_{j,k'}(y)dx dy, \end{aligned}$$

onde apenas usámos o facto de  $K(x, y)$  ter suporte em  $[0, 1] \times [0, 1]$  e a definição de periodização de funções.

Designando por  $\tilde{T}$  o operador definido à custa do núcleo periódico  $\tilde{K}(x, y)$ , podemos então escrever

$$\tilde{\alpha}_{k,k'}^j = \left\langle \tilde{T}\psi_{j,k'}, \psi_{j,k} \right\rangle, \quad \tilde{\beta}_{k,k'}^j = \left\langle \tilde{T}\psi_{j,k'}, \psi_{j,k} \right\rangle, \quad (5.10)$$

$$\tilde{\gamma}_{k,k'}^j = \left\langle \tilde{T}\psi_{j,k'}, \psi_{j,k} \right\rangle, \quad \tilde{s}_{k,k'}^j = \left\langle \tilde{T}\psi_{j,k'}, \psi_{j,k} \right\rangle. \quad (5.11)$$

Introduzamos agora algumas notações. Seja

$$\tilde{\Omega} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \notin \mathbb{Z}\} \quad (5.12)$$

e, para  $(x, y) \in \tilde{\Omega}$ , definamos

$$|x - y|_0 := \inf_{p \in \mathbb{Z}} \{|x - y - p|\}. \quad (5.13)$$

Por uma questão de simplicidade, vamos agora assumir que, ao periodizar o núcleo  $K(x, y)$ , não são introduzidas novas singularidades nos pontos provenientes da “periodização” dos bordos do quadrado  $Q$ , isto é, nos pontos da forma  $(x, y)$  com  $x \in \mathbb{Z}$  ou  $y \in \mathbb{Z}$ .<sup>2</sup> Nesse caso,  $\tilde{K}(x, y)$  será de classe  $C^M$  no conjunto  $\tilde{\Omega}$  definido por (5.12) e serão válidas as seguintes estimativas:

$$\left| \tilde{K}(x, y) \right| \leq \frac{C_0}{|x - y|_0}, \quad (x, y) \in \tilde{\Omega} \quad (5.14)$$

e

$$\left| \partial_x^M \tilde{K}(x, y) \right| + \left| \partial_y^M \tilde{K}(x, y) \right| \leq \frac{C_1}{|x - y|_0^{M+1}}, \quad (x, y) \in \tilde{\Omega}. \quad (5.15)$$

Uma análise cuidadosa das demonstrações do Lema 5.1 e Proposição 5.1 mostram que, neste caso, se obtêm os resultados contidos na seguinte proposição.

**Proposição 5.2** *Suponhamos que  $\tilde{K}$ , o núcleo do operador periodizado, satisfaz as estimativas (5.14) e (5.15), para  $(x, y) \in \tilde{\Omega}$ . Se a ôndula escolhida tiver  $M$  momentos nulos, então os coeficientes  $\tilde{\omega}_{k,k'}^j$  ( $\omega = \alpha, \beta, \gamma$ ) satisfazem as seguintes estimativas, válidas para  $|k - k'|_j > 2M - 1$ , onde  $|k - k'|_j = \inf_{p \in \mathbb{Z}} |k - k' - 2^{-j}p|$ :*

$$|\tilde{\omega}_{k,k'}^j| \leq \frac{C}{(1 + |k - k'|_j)^{M+1}} \quad (5.16)$$

---

<sup>2</sup>Na prática, esta assumption é um pouco irrealista, sendo aqui considerada para não complicar demasiado a análise envolvida.



### 5.3 Compressão da matriz não-standard

Como já referimos, uma forma de compressão de um operador passa por construir a sua forma matricial relativa a uma base de ôndulas e tomar como zero todas as entradas cujo valor absoluto seja inferior a uma determinada tolerância. Neste caso, vamos considerar a forma não-standard de um operador que satisfaça as condições da Proposição 5.2. Sabemos, então, que, em cada uma dos blocos  $\tilde{\mathcal{A}}_j$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}_j$  e  $\tilde{\mathcal{G}}_j$  os elementos na posição  $(k, k')$  vão decaindo para zero à medida que  $|k - k'|_j$  aumenta. Vamos ver agora como é possível majorar o erro cometido na compressão. Começemos com três lemas antes de chegar à proposição final.

Consideremos, então, um operador  $T$  definido em  $L^2([0, 1])$  e cujo núcleo periodizado satisfaça as condições (5.14) – (5.15) e seja  $\tilde{\mathbf{T}}^{-n}$  a matriz quadrada de ordem  $N = 2(2^n - 1)$  da forma não-standard de  $T \sim T_{-n}$ , obtida usando ôndulas de suporte compacto com  $M$  momentos nulos. Seja  $B$  um inteiro tal que  $B \geq 2M - 1$  e designemos por  $\tilde{\mathbf{T}}^{-n,B}$  a matriz resultante de  $\tilde{\mathbf{T}}^{-n}$  substituindo cada uma das suas submatrizes  $\tilde{\mathcal{A}}_j$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}_j$  e  $\tilde{\mathcal{G}}_j$  ( $j = -n + 1, \dots, 0$ ), respectivamente por matrizes  $\tilde{\mathcal{A}}_j^B$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}_j^B$  e  $\tilde{\mathcal{G}}_j^B$  obtidas tornando nulas as entradas nas posições  $(k, k')$  que verifiquem a condição  $|k - k'|_j > B$ . O que se pretende, é obter um majorante para a norma da matriz erro  $E^B := \tilde{\mathbf{T}}^{-n} - \tilde{\mathbf{T}}^{-n,B}$ , ou seja, majorar

$$\|E^B\| = \|\tilde{\mathbf{T}}^{-n} - \tilde{\mathbf{T}}^{-n,B}\|.$$

Para obter essa estimativa, iremos primeiro estabelecer três lemas.

**Lema 5.1** *Seja  $A = (a_{k,k'})$  uma matriz real de dimensão  $2^{-j} \times 2^{-j}$  onde  $j$  é um inteiro não positivo. Suponhamos que existem inteiros positivos  $B$ ,  $C$  e  $M$  tais que*

$$\begin{cases} a_{k,k'} = 0, & \text{se } |k - k'|_j \leq B \\ |a_{k,k'}| \leq \frac{C}{\left(1 + |k - k'|_j\right)^{M+1}}, & \text{se } |k - k'|_j > B. \end{cases} \quad (5.17)$$

Então,

$$\|A\| \leq \frac{2C}{M} B^{-M}. \quad (5.18)$$

**Demonstração:** Sabemos que  $\|A\|$  é o menor valor de  $\kappa$  que verifica  $|\sum_k \sum_{k'} a_{k,k'} v_k w_{k'}| \leq \kappa \|v\| \|w\|$  para todos os vectores  $v = (v_k)_{k=1}^{2^{-j}}$  e  $w = (w_k)_{k=1}^{2^{-j}}$ . Temos

$$\begin{aligned} \left| \sum_k \sum_{k'} a_{k,k'} v_k w_{k'} \right| &= \left| \sum_k \sum_{\substack{k' \\ |k-k'|_j > B}} a_{k,k'} v_k w_{k'} \right| && (\text{por (5.17)}) \\ &= \left| \sum_{\substack{l \\ |l|_j > B}} \sum_k a_{k,k+l} v_k w_{k+l} \right| \\ &\leq \sum_{\substack{l \\ |l|_j > B}} \sum_k |a_{k,k+l}| |v_k| |w_{k+l}| \end{aligned}$$

e, tendo novamente em conta (5.17), vem

$$\begin{aligned} \left| \sum_k \sum_{k'} a_{k,k'} v_k w_{k'} \right| &\leq \sum_{\substack{l \\ |l|_j > B}} \frac{C}{\left(1 + |l|_j\right)^{M+1}} \sum_k |v_k| |w_{k+l}| \\ &\leq \sum_{\substack{l \\ |l|_j > B}} \frac{C}{\left(1 + |l|_j\right)^{M+1}} \|v\| \|w\|. \end{aligned}$$

Desta forma tem-se que,

$$\begin{aligned} \|A\| &\leq \sum_{\substack{l \\ |l|_j > B}} \frac{C}{\left(1 + |l|_j\right)^{M+1}} \\ &\leq 2 \sum_{l=B+1}^{\infty} \frac{C}{(1+l)^{M+1}} \\ &\leq 2 \int_B^{\infty} \frac{C}{x^{M+1}} dx \\ &= \frac{2C}{MB^M}. \end{aligned}$$

■

**Lema 5.2** *Sejam  $A, B, C$  e  $D$  matrizes reais quadradas de ordem  $2^{-j}$  ( $j$  inteiro não positivo) tais que  $\|A\|, \|B\|, \|C\|, \|D\| \leq \lambda$ , onde  $\lambda$  é uma constante positiva. Então,*

$$\left\| \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right\| \leq 2\lambda.$$

**Demonstração:** Sejam  $v, w \in \mathbb{R}^{-j}$ . Então,

$$\left\| \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} Av + Bw \\ Cv + Dw \end{pmatrix} \right\|^2 = \|Av + Bw\|^2 + \|Cv + Dw\|^2$$

e pela desigualdade triangular, tem-se

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right\|^2 &\leq (\|Av\| + \|Bw\|)^2 + (\|Cv\| + \|Dw\|)^2 \\ &\leq (\|A\|^2 + \|C\|^2) \|v\|^2 + (\|B\|^2 + \|D\|^2) \|w\|^2 + \\ &\quad + 2(\|A\| \|B\| + \|C\| \|D\|) \|v\| \|w\| \\ &\leq 2\lambda^2 (\|v\|^2 + \|w\|^2) + 4\lambda^2 \|v\| \|w\| \end{aligned}$$

Do desenvolvimento do caso notável  $(\|v\| - \|w\|)^2$ , podemos concluir que  $2\|v\| \|w\| \leq \|v\|^2 + \|w\|^2$ . Desta forma,

$$\left\| \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right\|^2 \leq 4\lambda^2 (\|v\|^2 + \|w\|^2),$$

pelo que,

$$\left\| \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right\| \leq 2\lambda.$$

■

**Lema 5.3** *Seja  $A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n \end{pmatrix}$  uma matriz real diagonal por blocos, tal que cada bloco  $A_i$  da diagonal é uma matriz quadrada de ordem  $n_i$  que satisfaz  $\|A_i\| \leq \lambda$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Então,*

$$\|A\| \leq \sqrt{n}\lambda.$$

**Demonstração:** Seja  $m = \sum_{i=1}^n n_i$  e seja  $v$  um vector arbitrário de  $\mathbb{R}^m$ :

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad v_i \in \mathbb{R}^{n_i}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \|Av\| &= \left\| \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right\| = \|A_1 v_1 + \cdots + A_n v_n\| \\ &\leq \|A_1\| \|v_1\| + \cdots + \|A_n\| \|v_n\| \\ &\leq \lambda (\|v_1\| + \cdots + \|v_n\|). \end{aligned}$$

Mas, facilmente se mostra, por indução, que

$$\|v_1\| + \cdots + \|v_n\| \leq \sqrt{n} \|v\|,$$

o que conclui a demonstração. ■

Tem-se, finalmente, a proposição seguinte:

**Proposição 5.3** *Seja  $\tilde{\mathbf{T}}^{-n}$  e  $\tilde{\mathbf{T}}^{-n,B}$  as matrizes anteriormente referidas, tem-se*

$$\|\tilde{\mathbf{T}}^{-n} - \tilde{\mathbf{T}}^{-n,B}\| \leq \mathcal{C} \sqrt{n} B^{-M}, \quad (5.19)$$

onde  $\mathcal{C}$  é uma constante independente de  $n$  e de  $B$ .

**Demonstração:**

Trata-se de uma aplicação imediata dos três lemas anteriores. Primeiro, aplicando o Lema 5.1 a cada bloco  $\tilde{\mathcal{A}}_j - \tilde{\mathcal{A}}_j^B$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}_j - \tilde{\mathcal{B}}_j^B$  e  $\tilde{\mathcal{G}}_j - \tilde{\mathcal{G}}_j^B$ , podemos concluir que

$$\|\tilde{\mathcal{M}}_j - \tilde{\mathcal{M}}_j^B\| \leq \frac{2C}{M} B^{-M}, \quad \mathcal{M} = \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{G},$$

onde  $C$  é a constante referida na Proposição 5.2. Aplicando, de seguida, o Lema 5.2 a cada submatriz (bloco da diagonal)

$$D_j = \left( \begin{array}{c|c} \mathcal{O} & \tilde{\mathcal{G}}_j - \tilde{\mathcal{G}}_j^B \\ \hline \tilde{\mathcal{B}}_j - \tilde{\mathcal{B}}_j^B & \tilde{\mathcal{A}}_j - \tilde{\mathcal{A}}_j^B \end{array} \right)$$

concluimos que

$$\|D_j\| \leq \frac{4C}{M} B^{-M},$$

e finalmente, notando que a matriz  $E^{-n,B} = \mathbf{T}^{-n} - \mathbf{T}^{-n,B}$  é precisamente da forma considerada no Lema 5.3, com  $A_i = D_{-i+1}; i = 1, \dots, n$ , vem

$$\|E^{-n,B}\| \leq \frac{4C}{M} \sqrt{n} B^{-M},$$

o que conclui a demonstração. ■

**Nota 5.1** Na prática, geralmente, pretende-se obter uma determinada precisão  $\epsilon$  previamente fixada, sendo necessário escolher os parâmetros do algoritmo (neste caso,  $B$  e  $M$ ) de forma adequada. Fixando  $M$ , então, de acordo com o resultado anterior,  $B$  deverá ser escolhido satisfazendo

$$B \geq \max \left\{ 2M - 1, \left( \frac{\mathcal{C}\sqrt{n}}{\epsilon} \right)^{1/M} \right\}. \quad (5.20)$$

Assim, se dispusermos de informação suficiente acerca do núcleo do operador (de forma a conseguirmos determinar a constante  $C$  referida na Proposição 5.2 e, conseqüentemente, o valor da constante  $\mathcal{C}$  em (5.20)), podemos decidir, *a priori* qual a largura de banda  $B$ . Precisamos, então, de calcular apenas  $\mathcal{O}(N)$  entradas da matriz  $\tilde{\mathbf{T}}^{-n,B}$ .

Se definirmos a taxa de compressão  $T_{comp}$  como o quociente de  $N^2$  (onde  $N = 2^n$  é a ordem da matriz inicial) pelo número de elementos não nulos da matriz comprimida, tem-se, então

$$T_{comp} = \mathcal{O}(N). \quad (5.21)$$

Convém referir que, neste caso, pode ser mais eficiente utilizar fórmulas de quadratura apropriadas para calcular os elementos  $\tilde{\alpha}_{k,k'}$ ,  $\tilde{\beta}_{k,k'}$  e  $\tilde{\gamma}_{k,k'}$  dados por (5.10) – (5.11) do que usar a versão bi-dimensional do algoritmo da transformada rápida (2.80); para mais pormenores veja, e.g. [BCR91].

**Nota 5.2** É importante referir que resultados idênticos aos aqui apresentados para operadores de Calderón-Zygmund são válidos também para os chamados operadores *pseudo-diferenciais*. Estes são operadores da forma

$$(Tf)(x) := \int e^{i\xi x} \sigma(x, \xi) \widehat{f}(\xi) d\xi$$

onde o *símbolo*  $\sigma(x, \xi)$  satisfaz

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{\lambda - \alpha - \beta}$$

sendo também válidas estimativas idênticas

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma^*(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta}^* (1 + |\xi|)^{\lambda - \alpha - \beta}$$

para o símbolo  $\sigma^*(x, \xi)$  do operador adjunto  $T^*$ ; veja [BCR91, Remark 4.1].

**Nota 5.3** Os resultados da Proposição 5.1 e da Proposição 5.3 foram obtidos supondo que o núcleo  $K(x, y)$  do operador é apenas singular ao longo da diagonal  $x = y$ , sendo essas singularidades integráveis. Estes resultados são facilmente generalizáveis para o caso de  $K$  possuir singularidades ao longo de um número finito de bandas, colunas, etc.

## 5.4 Breve referência à compressão da forma standard

Designemos por  $I_{j,k}$  e  $I_{j',k'}$  os suportes, respectivamente, de  $\psi_{j,k}$  e  $\psi_{j',k'}$ , isto é,  $I_{j,k} = [2^j k, 2^j(k + 2M - 1)]$  e  $I_{j',k'} = [2^{j'} k', 2^{j'}(k' + 2M - 1)]$  e sejam  $|I_{j,k}|$  e  $|I_{j',k'}|$  as respectivas amplitudes:  $|I_{j,k}| = 2^j(2M - 1)$ ,  $|I_{j',k'}| = 2^{j'}(2M - 1)$ . Suponhamos que  $j' > j$ . Então, seguindo a par e passo a demonstração do resultado (5.5) do Lema 5.1, facilmente se mostra que

$$\begin{aligned} |\beta_{k,k'}^{\{j,j'\}}| &= |\langle T\psi_{j',k'}, \psi_{j,k} \rangle| \leq C_M 2^{(j'-j)^{1/2}} 2^{j(M+1)} \\ &\quad \times \sup_{\substack{|x| \leq 2^j(M-1/2) \\ |y| \leq 2^{j'}(M-1/2)}} \left| \partial_x^M K \left( x + 2^j(k + M - 1/2), y + 2^{j'}(k' + M - 1/2) \right) \right| \end{aligned}$$

Para  $j, j', k, k'$  tais que  $I_{j,k} \cap I_{j',k'} = \emptyset$ , podemos, então concluir que

$$\begin{aligned} \left| \beta_{k,k'}^{\{j,j'\}} \right| &\leq C_M 2^{(j'-j)^{1/2}} \left( \frac{2^j}{d(I_{j,k}, I_{j',k'})} \right)^{M+1} \\ &\leq C_M \left( \frac{|I_{j',k'}|}{|I_{j,k}|} \right)^{1/2} \left( \frac{|I_{j,k}|}{d(I_{j,k}, I_{j',k'})} \right)^{M+1} \end{aligned}$$

onde  $d(I_{j,k}, I_{j',k'}) = \inf\{|x - y| : x \in I_{j,k}, y \in I_{j',k'}\}$ .

De forma totalmente análoga se estabelecem estimativas idênticas para os elementos  $\gamma_{k,k'}^{\{j,j'\}}$ ,  $j' < j$ , das matrizes  $\mathcal{G}^{\{j,j'\}}$ .

A partir dos resultados anteriores (e tendo em atenção as estimativas já obtidas para os elementos das matrizes  $\mathcal{A}_j$ ), não é difícil de ver que, para  $N$  suficientemente grande, e fixada uma tolerância  $\epsilon$ , haverá apenas  $\mathcal{O}(N \log N)$  elementos da matriz na forma standard superiores a essa tolerância, ou seja, a matriz standard poderá ser comprimida para uma matriz dispersa com apenas  $\mathcal{O}(N \log N)$  elementos não nulos. Isto corresponde, então, a uma taxa de compressão

$$T_{comp} = \mathcal{O}(N / \log N). \quad (5.22)$$

**Nota 5.4** Em [BCR91, Remark 4.4], os autores afirmam que é possível mostrar, usando uma análise mais cuidadosa, que para operadores que satisfaçam determinadas condições, o número de elementos inferiores à tolerância é assintoticamente da ordem  $\mathcal{O}(N)$ , pelo que, para esse tipo de operadores e para  $N$  suficientemente grande, se terá  $T_{comp} = \mathcal{O}(N)$ .

## Capítulo 6

# Resultados Numéricos

Neste capítulo são apresentados resultados numéricos destinados a ilustrar algumas das conclusões referidas nos capítulos anteriores. Estes resultados foram obtidos utilizando um programa implementado em *Matlab*, no qual são usadas algumas rotinas da *Wavelet Toolbox for MATLAB* [Mat]; uma listagem deste programa encontra-se em anexo (Apêndice 1).

Os resultados referem-se a seis exemplos de matrizes, as quais podem ser vistas como a discretização inicial de outros tantos operadores. Para cada matriz  $A$ :

1. calcularam-se as respectivas formas matriciais standard ( $\mathcal{M}_S$ ) e não-standard ( $\mathcal{M}_{NS}$ ), relativas a determinadas ôndulas;
2. comprimiram-se as matrizes  $\mathcal{M}_S$  e  $\mathcal{M}_{NS}$  transformando em zero todos os elementos de valor absoluto inferior a  $\epsilon \times m$ , onde  $m = \max\{|\mathcal{M}_{ij}|\}$  e  $\epsilon$  é uma dada tolerância (escolhida para cada caso);
3. mediram-se as taxas de compressão  $T_{comp}$ , onde, relembre-se,  $T_{comp}$  é definida como o quociente de  $N^2$  ( $N$  a ordem da matriz inicial  $A$ ) pelo número de elementos não-nulos da forma comprimida;
4. mediram-se os tempos de CPU gastos na obtenção de cada uma das formas matriciais (standard/não-standard);



5. multiplicou-se cada uma das matrizes comprimidas pela decomposição standard/não-standard de um vector aleatório  $x$  e reconstruiu-se o resultado, obtendo-se um vector  $\tilde{y}$ ;
6. calculou-se o produto “normal”  $y = Ax$  e determinou-se o erro relativo de  $\tilde{y}$  em relação a  $y$  (na norma de  $\ell^2$ ), isto é, calculou-se

$$\text{Erro} = \frac{\|y - \tilde{y}\|_2}{\|y\|_2}.$$

É importante salientar que na construção das matrizes standard e não-standard comprimidas não foi tida em linha de conta informação sobre o operador em causa, isto é, a construção fez-se calculando toda a matriz e efectuando a compressão posteriormente. Não houve, assim, uma grande preocupação com a eficiência, sendo o principal objectivo apenas mostrar a capacidade de compressão resultante da representação em bases de ôndulas.

Para testar numericamente a validade das fórmulas (5.21) e (5.22), as quais indicam a ordem das taxas de compressão, calcularam-se os valores  $p(N)$ , onde, no caso da forma não-standard

$$p(N) = \log_2\left(\frac{T_{comp}(N)}{T_{comp}(N/2)}\right), \quad (6.1)$$

e, no caso da forma standard,

$$p(N) = \log_2\left(\frac{T_{comp}(N)}{T_{comp}(N/2)} \times \frac{\log N}{\log(N/2)}\right), \quad (6.2)$$

sendo de esperar obter valores de  $p$  próximos de 1. No caso da forma não-standard, valores de  $p$  superiores a 1 indicarão uma taxa de compressão superior à dada pela fórmula (5.22), o que poderá acontecer em certos casos, tal como se referiu na Nota 5.4.

Em todos os exemplos foram usadas ôndulas da família de ôndulas de Daubechies, sendo escolhido, em cada caso, o número de momentos nulos  $M$  da ôndula a utilizar.

Nas diversas tabelas apresentam-se os resultados numéricos referentes aos valores de  $N = 64, 128, 256, 512$  e  $1024$ , sendo fornecidos, para ambas as formas, standard e não-standard: os valores do erro (Erro), as taxas de compressão ( $T_{comp}$ ), os tempos de CPU ( $t_{CPU}$ ) e ainda os valores de  $p$  acima referidos.

São também apresentadas figuras relativas aos diversos exemplos, todas elas referentes ao caso  $N = 256$ . Nestas figuras representam-se graficamente as matrizes comprimidas, sendo ainda apresentados os gráficos do vector inicial, dos vectores resultante do produto da matriz dada inicialmente e da matriz comprimida por esse vector, bem como do vector erro. Na apresentação gráfica das matrizes comprimidas, as entradas não nulas tomam coloração preta e as nulas têm cor branca.

**Nota 6.1** De referir que foram testados outros valores de tolerâncias e de ôndulas, não havendo diferenças significativas nos resultados obtidos (desde que, naturalmente, as ôndulas escolhidas possuam um número de momentos nulos suficientemente grande).

**Exemplo 6.1** ([BCR91]) *Este exemplo diz respeito à compressão de matrizes da forma*

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i-j}, & i \neq j, \\ 0, & i = j; \end{cases}$$

para  $i, j = 1, \dots, N$ , onde  $N = 2^n$ . Note-se que estas matrizes podem ser vistas como uma simples discretização do operador de Hilbert, definido em  $L^2([0, 1])$ , ou seja de

$$(Hf)(x) := PV \int_0^1 \frac{1}{x-y} f(y) dy,$$

usando  $N = 2^n$  pontos equidistantes no intervalo  $[0, 1]$ ; veja a fórmula (3.27)

da Secção 3.1.4.<sup>1</sup> Este operador satisfaz, naturalmente, as condições (5.3) e (5.4), para  $(x, y) \in Q = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x \neq y\}$ . Há, no entanto, que notar que a extensão periódica do seu núcleo é descontínua também nos pontos da forma  $(x, y)$  com  $x \in \mathbb{Z}$  ou  $y \in \mathbb{Z}$ , isto é, não são satisfeitas as condições (5.14)-(5.15) para todos os pontos  $(x, y) \in \tilde{\Omega}$ .

Neste exemplo foram, primeiramente, usadas ôndulas com  $M = 6$  momentos nulos e considerada uma tolerância  $\epsilon = 10^{-7}$ .

Os resultados correspondentes encontram-se na Tabela 6.1, Figura 6.1 (forma não standard) e Figura 6.2 (forma standard).

N	Forma não-standard				Forma standard			
	Erro	$T_{comp}$	$t_{CPU}$	$p$	Erro	$T_{comp}$	$t_{CPU}$	$p$
64	$1.69 \times 10^{-7}$	1.42	0.02	—	$1.01 \times 10^{-7}$	1.26	0.21	—
128	$1.81 \times 10^{-7}$	2.31	0.04	0.70	$1.93 \times 10^{-7}$	1.81	0.47	0.61
256	$2.15 \times 10^{-7}$	4.10	0.16	0.83	$2.09 \times 10^{-7}$	2.83	1.08	0.73
512	$2.36 \times 10^{-7}$	7.66	0.69	0.90	$2.46 \times 10^{-7}$	4.74	3.25	0.84
1024	$2.37 \times 10^{-7}$	14.74	3.71	0.94	$2.88 \times 10^{-7}$	8.50	12.12	0.94

Tabela 6.1: Resultados do Exemplo 6.1 ( $M = 6$ ,  $\epsilon = 10^{-7}$ )

Neste caso, como mostram os valores da Tabela 6.1, as taxas de compressão obtidas com a forma não-standard são bastante superiores às da forma standard.

A forma esparsa das matrizes comprimidas é bem visível nas Figuras 6.1. e 6.2. As bandas horizontais e verticais que aparecem nas matrizes dessas figuras são devidas às já referidas descontinuidades resultantes da periodização do núcleo do operador (ou seja, são devidas à utilização das ôndulas periodizadas).

---

<sup>1</sup>O operador de Hilbert é habitualmente definido com um factor adicional de  $\frac{1}{\pi}$ , isto é:  $(Hf)(x) := \frac{1}{\pi} PV \int \frac{1}{x-y} f(y) dy$ .

Apenas com o objectivo de ilustrar a importância da escolha das ôndulas, repetiram-se os cálculos usando um ôndula com apenas  $M = 2$  momentos nulos e mantendo-se a tolerância  $\epsilon = 10^{-7}$ . Os resultados correspondentes estão dados na Tabela 6.2.

N	Forma não-standard				Forma standard			
	Erro	$T_{comp}$	$t_{CPU}$	$p$	Erro	$T_{comp}$	$t_{CPU}$	$p$
64	$3.77 \times 10^{-8}$	1.06	0.01	—	$5.15 \times 10^{-8}$	1.06	0.18	—
128	$4.92 \times 10^{-8}$	1.16	0.03	0.14	$8.32 \times 10^{-8}$	1.31	0.44	0.36
256	$4.24 \times 10^{-7}$	1.30	0.14	0.16	$1.81 \times 10^{-7}$	1.91	1.11	0.62
512	$3.05 \times 10^{-6}$	1.79	0.66	0.47	$3.46 \times 10^{-7}$	3.18	2.97	0.83
1024	$4.37 \times 10^{-6}$	2.91	3.26	0.70	$7.59 \times 10^{-7}$	5.76	11.74	0.95

Tabela 6.2: Resultados do Exemplo 6.1 ( $M = 2$ ,  $\epsilon = 10^{-7}$ )

**Exemplo 6.2** ([BCR91]) Neste exemplo foram consideradas matrizes da forma

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{\log|i-2^{n-1}| - \log|j-2^{n-1}|}{i-j}, & i \neq j, i, j \neq 2^{n-1}, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

para  $i, j = 1, \dots, N$ , onde  $N = 2^n$ . O correspondente operador tem núcleo

$$K(x, y) = \frac{\log|x - \frac{1}{2}| - \log|y - \frac{1}{2}|}{x - y}$$

com singularidades não apenas na diagonal, mas também nos pontos  $(x, y)$  com  $x = \frac{1}{2}$  ou  $y = \frac{1}{2}$ . Os resultados apresentados na Tabela 6.3, Figura 6.3 e Figura 6.4 foram obtidos usando ôndulas com  $M = 6$  momentos nulos e especificando novamente uma tolerância  $\epsilon = 10^{-7}$ .

Este exemplo ilustra claramente a afirmação feita na Nota 5.3 sobre a possibilidade de estender os resultados dos teoremas para operadores cujo núcleo tenha as singularidades distribuídas ao longo de um número finito de bandas, colunas, etc. As bandas horizontais e verticais que surgem nas matrizes

das Figuras 6.3 e 6.4 são precisamente devidas às singularidades referidas para o núcleo do operador aqui em causa. Para ilustrar de forma mais clara esta afirmação, repetiu-se este exemplo para um operador idêntico, mas com as singularidades ao longo das rectas  $x = 1/4$  e  $y = 1/4$ . As Figuras 6.5 e 6.6 apresentam as forma matriciais não-standard e standard correspondentes a este caso, sendo clara a influência das novas singularidades.

N	Forma não-standard				Forma standard			
	Erro	$T_{comp}$	$t_{CPU}$	$p$	Erro	$T_{comp}$	$t_{CPU}$	$p$
64	$1.54 \times 10^{-7}$	1.25	0.01	—	$1.00 \times 10^{-7}$	1.21	0.21	—
128	$1.71 \times 10^{-7}$	2.08	0.04	0.73	$1.06 \times 10^{-7}$	1.98	0.46	0.82
256	$1.81 \times 10^{-7}$	3.93	0.11	0.92	$1.43 \times 10^{-7}$	4.06	1.12	1.19
512	$2.07 \times 10^{-7}$	7.93	0.79	1.01	$1.62 \times 10^{-7}$	9.58	3.39	1.39
1024	$2.17 \times 10^{-7}$	16.76	3.93	1.08	$1.76 \times 10^{-7}$	24.88	13.30	1.53

Tabela 6.3: Resultados do Exemplo 6.2 ( $M = 6$ ,  $\epsilon = 10^{-7}$ )

**Exemplo 6.3 ([Oja98])** Este exemplo refere-se a matrizes da forma

$$A_{ij} = \begin{cases} \cot\left(\frac{\pi(i-j)}{N}\right), & i \neq j \\ 0, & i = j; \end{cases}$$

para  $i, j = 1, \dots, N$ , onde  $N = 2^n$ . Os resultados, para  $M = 4$  e  $\epsilon = 10^{-6}$  são apresentados na Tabela 6.4 e nas Figuras 6.5 e 6.6.

É interessante notar que, neste exemplo, as bandas horizontais e verticais não estão presentes, uma vez que o núcleo do operador é periódico, pelo que a periodização não introduz novas singularidades.

**Exemplo 6.4 ([BCR91])** Neste exemplo, comprimimos matrizes da forma

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i-j+\frac{1}{2}\cos(ij)}, & i \neq j, \\ 0, & i = j; \end{cases}$$

N	Forma não-standard				Forma standard			
	Erro	$T_{comp}$	$t_{CPU}$	$p$	Erro	$T_{comp}$	$t_{CPU}$	$p$
64	$1.94 \times 10^{-7}$	1.19	0.02	—	$1.12 \times 10^{-7}$	1.33	0.20	—
128	$2.47 \times 10^{-7}$	1.68	0.03	0.51	$1.44 \times 10^{-7}$	1.93	0.41	0.63
256	$3.17 \times 10^{-7}$	2.94	0.15	0.80	$1.82 \times 10^{-7}$	3.11	1.12	0.78
512	$3.59 \times 10^{-7}$	5.54	0.77	0.91	$1.96 \times 10^{-7}$	5.28	3.28	0.86
1024	$3.45 \times 10^{-7}$	10.75	3.41	0.96	$2.15 \times 10^{-7}$	9.29	12.16	0.91

Tabela 6.4: Resultados do Exemplo 6.3 ( $M = 4$ ,  $\epsilon = 10^{-7}$ )

$i, j = 1, \dots, N$ .

O núcleo do correspondente operador é

$$K(x, y) = \frac{1}{x - y + 0.5 \cos(xy)},$$

pelo que

$$\frac{\partial}{\partial x} K(x, y) = -\frac{1 - 0.5y \sin(xy)}{(x - y + 0.5 \cos(xy))^2},$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x, y) = \frac{0.5 \cos(xy) y^2}{(x - y + 0.5 \cos(xy))^2} + \frac{2(1 - 0.5y \sin(xy))^2}{(x - y + 0.5 \cos(xy))^3}$$

(com expressões idênticas para  $\frac{\partial}{\partial y} K(x, y)$  e  $\frac{\partial^2}{\partial y^2} K(x, y)$ ). Vemos, assim, que este operador satisfaz as condições (5.3) e (5.4) apenas para  $M = 1$ . Ainda assim, desde que não exijamos uma precisão demasiado elevada, o esquema de compressão funciona ainda razoavelmente. Usando ôndulas com  $M = 2$  momentos nulos e tomando  $\epsilon = 10^{-3}$ , obtiveram-se os resultados que se apresentam na Tabela 6.5.

**Exemplo 6.5** ([BCR91]) Neste caso consideraram-se matrizes da forma

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{i \cos(\log i^2) - j \cos(\log j^2)}{(i-j)^2}, & i \neq j. \\ 0, & i = j; \end{cases}$$

N	Forma não-standard				Forma standard			
	Erro	$T_{comp}$	$t_{CPU}$	$p$	Erro	$T_{comp}$	$t_{CPU}$	$p$
64	$2.43 \times 10^{-3}$	2.28	0.03	—	$1.03 \times 10^{-3}$	1.93	0.19	—
128	$2.50 \times 10^{-3}$	4.26	0.03	0.91	$1.15 \times 10^{-3}$	3.26	0.44	0.88
256	$2.72 \times 10^{-3}$	8.00	0.15	0.91	$1.68 \times 10^{-3}$	5.75	1.06	0.94
512	$5.99 \times 10^{-3}$	15.80	0.68	0.98	$2.38 \times 10^{-3}$	10.45	2.98	0.97
1024	$7.89 \times 10^{-3}$	31.31	3.23	0.99	$4.41 \times 10^{-3}$	19.37	12.22	0.99

Tabela 6.5: Resultados do Exemplo 6.4 ( $M = 2$ ,  $\epsilon = 10^{-3}$ )

as quais, tal como no exemplo anterior, correspondem a um operador cujo núcleo satisfaz as condições de decaimento (5.3) e (5.4), apenas para  $M = 1$ . Usando novamente ôndulas com apenas  $M = 2$  momentos nulos e exigindo uma tolerância  $\epsilon = 10^{-3}$ , obtiveram-se os resultados constantes na Tabela 6.6. Este resultados indicam que, mesmo neste caso, o esquema de compressão baseado em ôndulas pode ser utilizado (desde que não estejamos preocupados com uma muito elevada precisão).

N	Forma não-standard				Forma standard			
	Erro	$T_{comp}$	$t_{CPU}$	$p$	Erro	$T_{comp}$	$t_{CPU}$	$p$
64	$2.63 \times 10^{-3}$	2.80	0.02	—	$1.56 \times 10^{-3}$	2.42	0.18	—
128	$3.04 \times 10^{-3}$	5.02	0.03	0.84	$2.34 \times 10^{-3}$	4.43	0.41	1.02
256	$4.14 \times 10^{-3}$	10.40	0.14	1.05	$3.15 \times 10^{-3}$	8.55	1.06	1.08
512	$5.01 \times 10^{-3}$	20.60	0.68	0.99	$3.01 \times 10^{-3}$	16.36	2.95	1.05
1024	$6.21 \times 10^{-3}$	46.78	3.23	1.18	$4.16 \times 10^{-3}$	35.02	11.62	1.22

Tabela 6.6: Resultados do Exemplo 6.5 ( $M = 2$ ,  $\epsilon = 10^{-3}$ )

**Exemplo 6.6** ([Wal01]) *Considere-se um problema de valores iniciais da*

forma

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Como é bem sabido, a solução deste problema é dada por

$$u(x) = (Tf)(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)dy \quad (6.3)$$

onde  $K(x, y)$  é a função de Green para o problema em causa. Neste caso, é fácil de verificar que

$$K(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x-1)\sin(y)}{\sin(1)}, & 0 \leq y \leq x \\ \frac{\sin(x)\sin(y-1)}{\sin(1)}, & x \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Considerando a matriz

$$A_{ij} = K(2^{-n}i, 2^{-n}j); i, j = 1, \dots, 2^n$$

como a discretização inicial do operador (6.3) e usando ôndulas com  $M = 6$  e uma tolerância  $\epsilon = 10^{-7}$ , obtiveram-se os resultados que se apresentam na Tabela 6.7 e nas Figuras 6.7 e 6.8.

	Forma não-standard				Forma standard			
N	Erro	$T_{comp}$	$t_{CPU}$	$p$	Erro	$T_{comp}$	$t_{CPU}$	$p$
64	$5.25 \times 10^{-8}$	2.01	0.02	—	$6.00 \times 10^{-8}$	1.53	0.22	—
128	$4.91 \times 10^{-7}$	3.64	0.04	0.86	$7.15 \times 10^{-8}$	2.86	0.45	1.05
256	$2.39 \times 10^{-7}$	7.12	0.17	0.97	$1.17 \times 10^{-7}$	6.45	1.16	1.34
512	$7.06 \times 10^{-7}$	15.02	0.74	1.08	$1.33 \times 10^{-7}$	16.19	3.22	1.49
1024	$5.00 \times 10^{-7}$	32.95	3.93	1.13	$1.33 \times 10^{-7}$	43.34	12.58	1.58

Tabela 6.7: Resultados do Exemplo 6.6 ( $M = 6$ ,  $\epsilon = 10^{-7}$ )



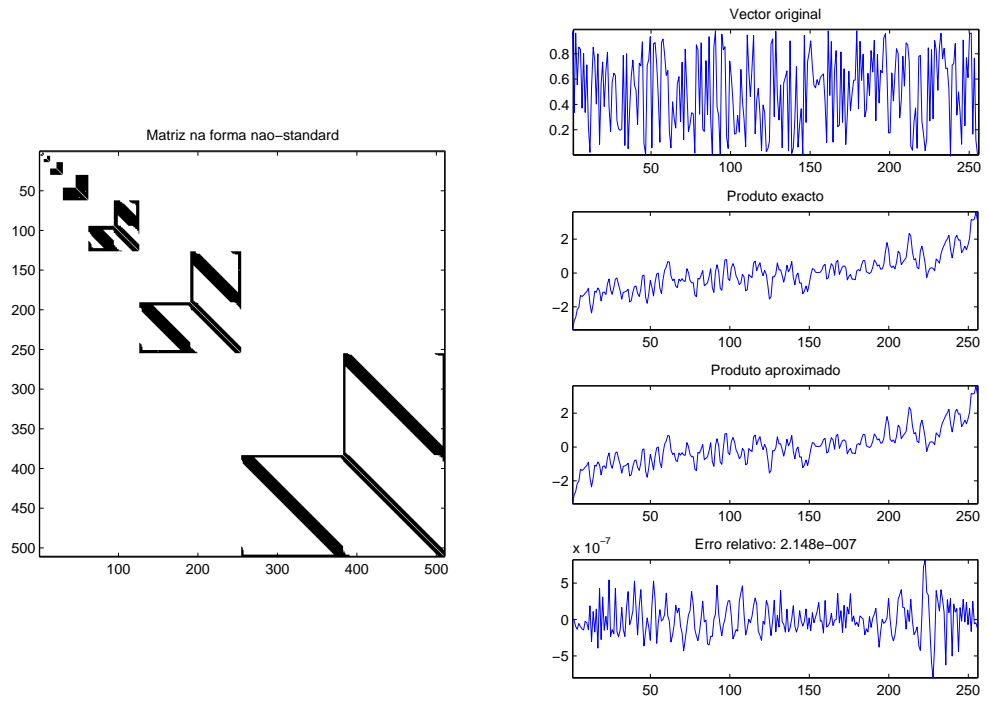


Figura 6.1: Exemplo 6.1 – forma não-standard ( $N = 256$ ,  $M = 6$ ,  $\epsilon = 10^{-7}$ )

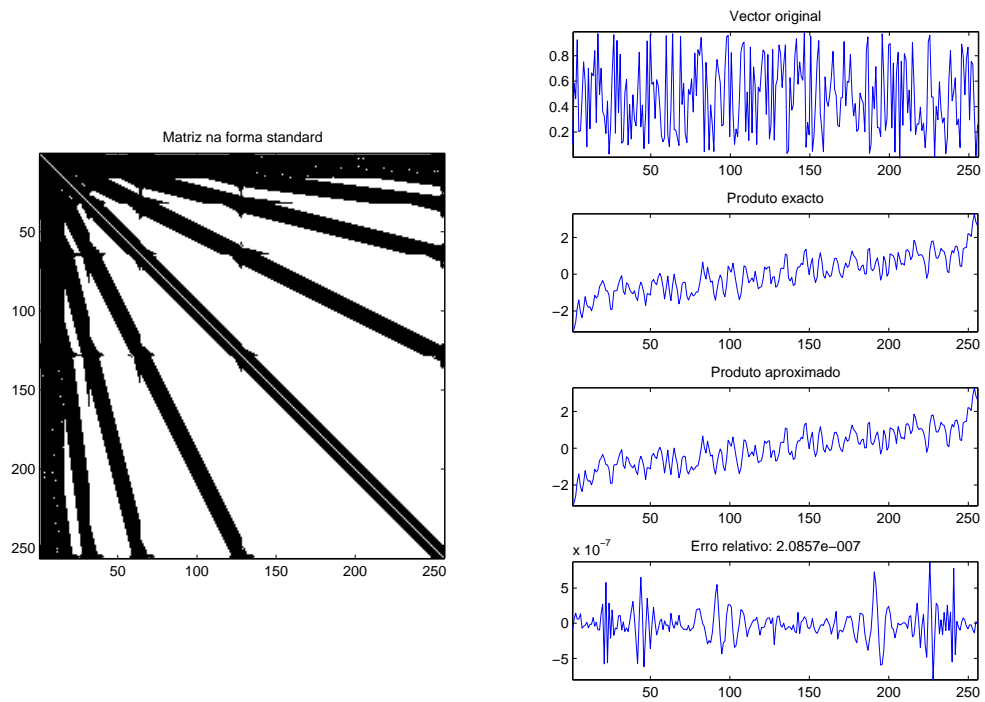


Figura 6.2: Exemplo 6.1 – forma standard ( $N = 256$ ,  $M = 6$ ,  $\epsilon = 10^{-7}$  )

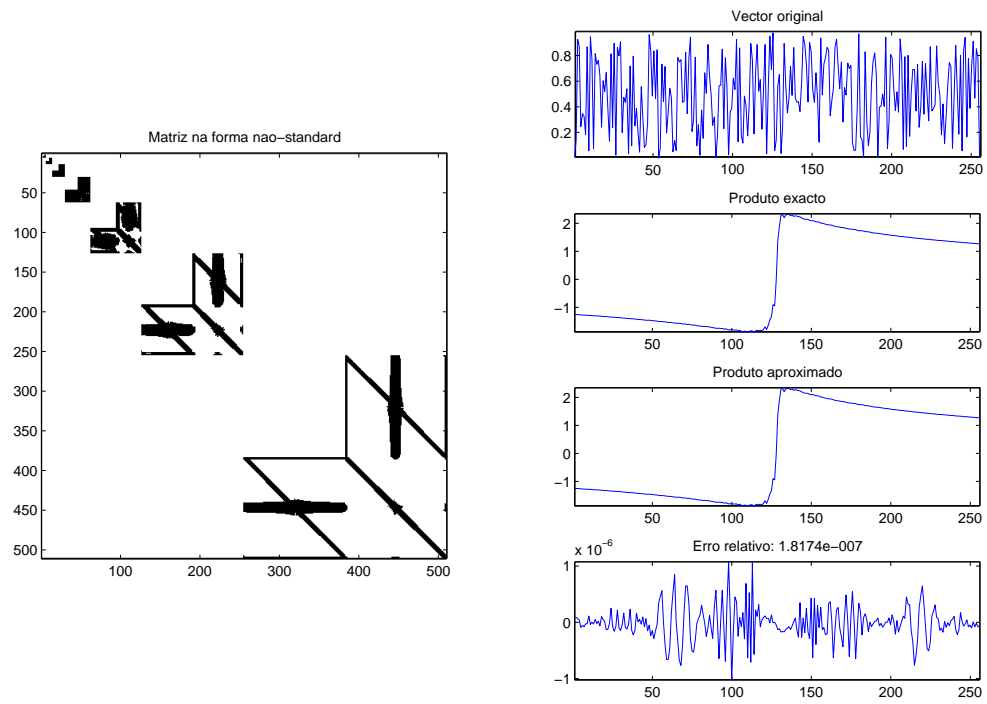


Figura 6.3: Exemplo 6.2 – forma não-standard ( $N = 256$ ,  $M = 6$ ,  $\epsilon = 10^{-7}$ )

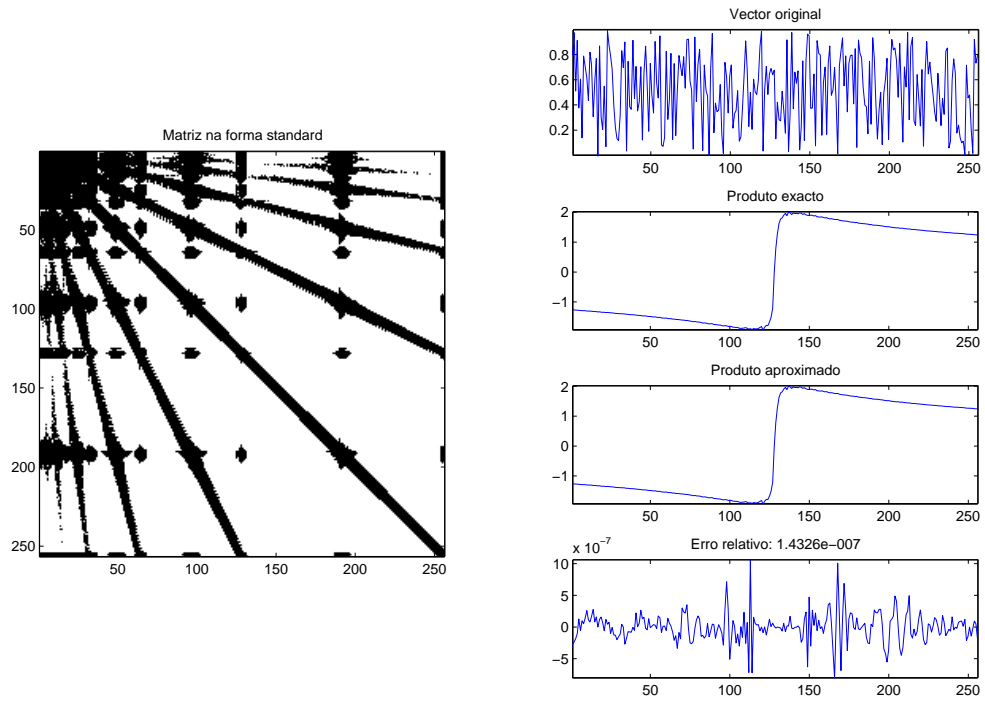


Figura 6.4: Exemplo 6.2 – forma standard ( $N = 256$ ,  $M = 6$ ,  $\epsilon = 10^{-7}$ )

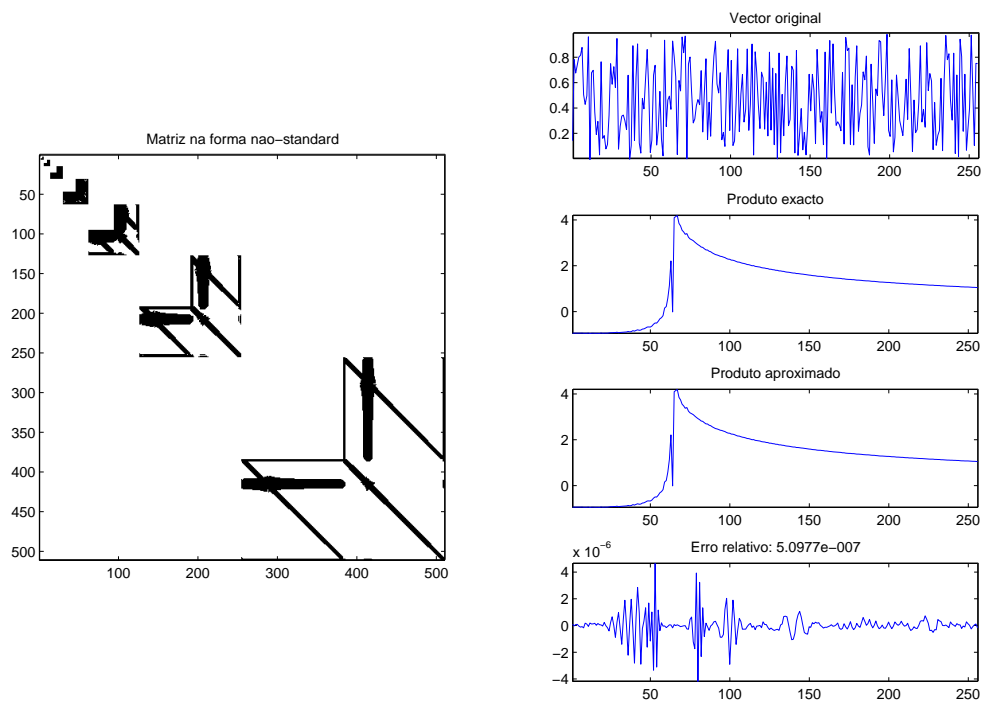


Figura 6.5: Exemplo 6.2 com singularidades em  $x = 1/4$  e  $y = 1/4$  – forma não-standard ( $N = 256$ ,  $M = 6$ ,  $\epsilon = 10^{-7}$ )

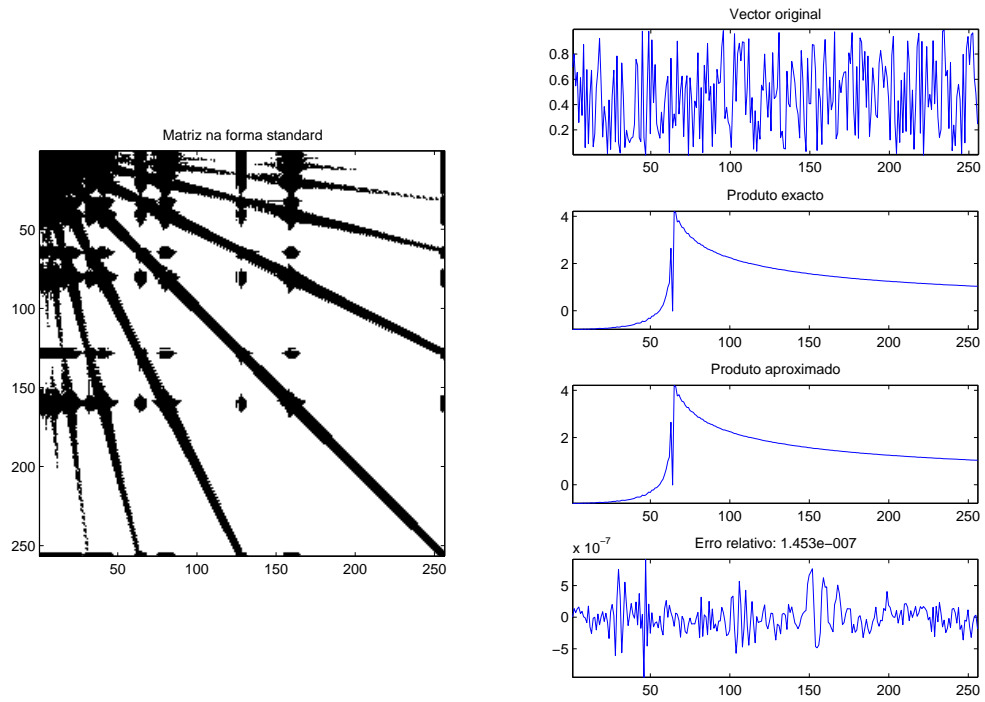


Figura 6.6: Exemplo 6.2 com singularidades em  $x = 1/4$  e  $y = 1/4$  – forma standard ( $N = 256$ ,  $M = 6$ ,  $\epsilon = 10^{-7}$ )

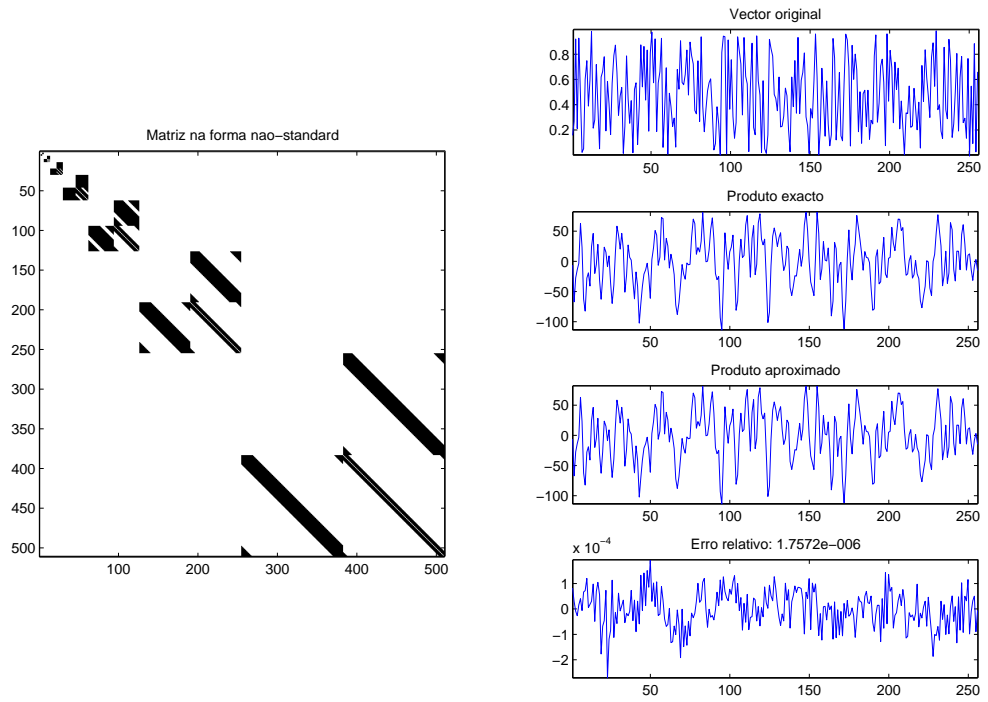


Figura 6.7: Exemplo 6.3 – forma não-standard ( $N = 256$ ,  $M = 4$ ,  $\epsilon = 10^{-6}$ )

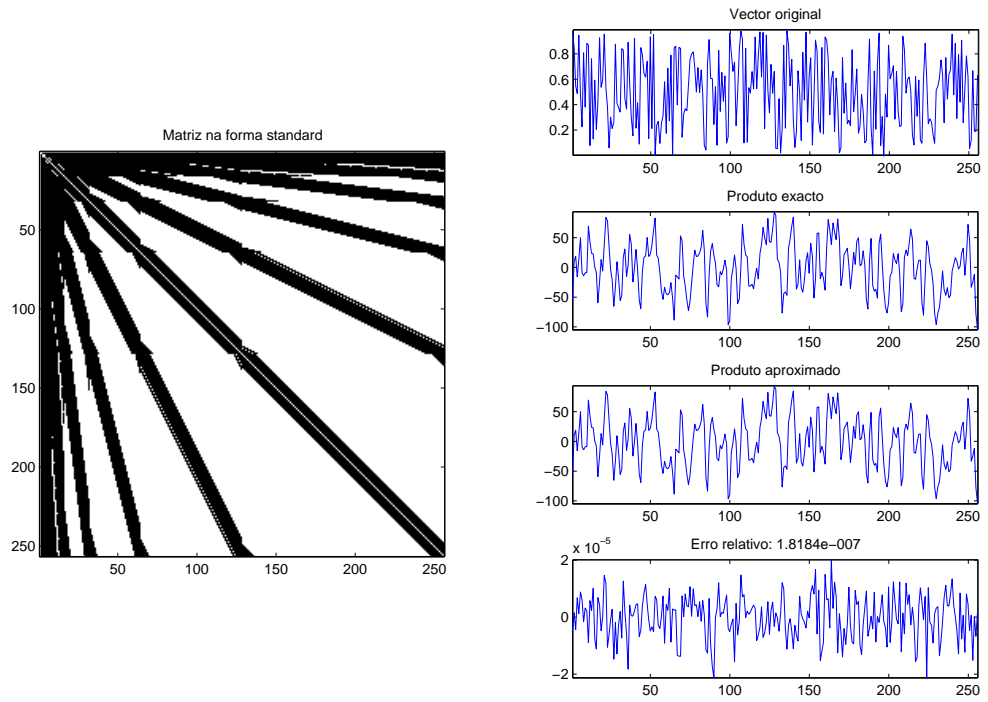


Figura 6.8: Exemplo 6.3 – forma standard ( $N = 256$ ,  $M = 4$ ,  $\epsilon = 10^{-6}$ )



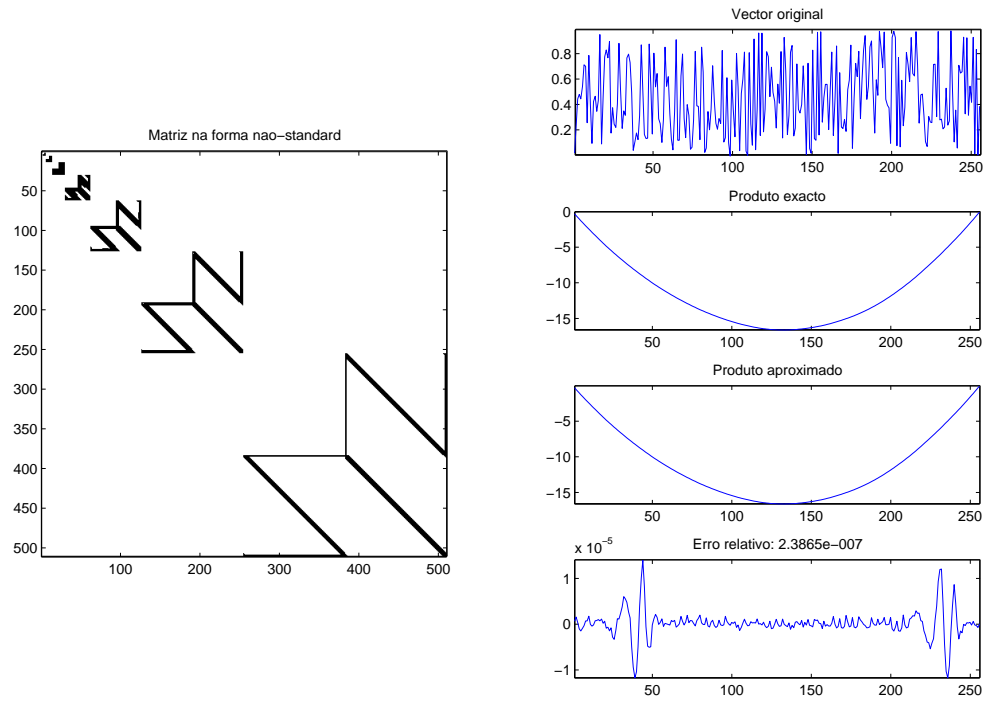


Figura 6.9: Exemplo 6.6 – forma não-standard ( $N = 256$ ,  $M = 6$ ,  $\epsilon = 10^{-7}$ )

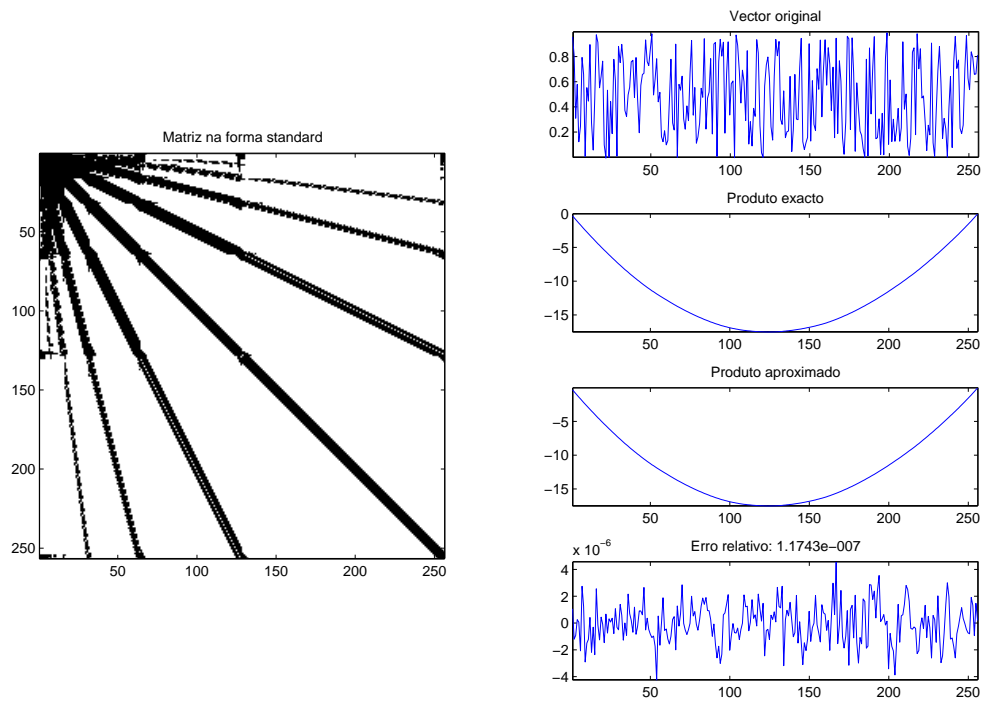


Figura 6.10: Exemplo 6.6 – forma standard ( $N = 256$ ,  $M = 6$ ,  $\epsilon = 10^{-7}$ )

## Capítulo 7

# Algumas Conclusões e Trabalho Futuro

A utilização de ôndulas para representar certas classes de operadores, em especial através da forma não-standard, conduz, como vimos, a matrizes cujos elementos fora da diagonal têm um decaimento muito rápido, sendo a taxa de decaimento dependente do operador e do número de momentos nulos da ôndula-mãe utilizada.

Estas matrizes podem, assim, ser altamente comprimidas sem grande erro, o que leva a obtenção de algoritmos muito eficientes para o cálculo de operadores.

A descoberta deste processo, que passou a ser conhecido vulgarmente por Algoritmo BCR (de Beylkin, Coifman e Rokhlin), originou um interesse renovado da utilização de ôndulas em diversas áreas de Análise Numérica. Sem termos qualquer pretensão em ser exaustivos, damos de seguida alguns exemplos que permitem avaliar a importância deste algoritmo, pelas diversas generalizações e aplicações que veio suscitar.

Em [Bey91], [Bey92], [BCR92] e [Bey93], os autores desenvolvem uma verdadeira “álgebra matricial” em bases de ôndulas, descrevendo como adaptar o algoritmo, inicialmente descrito para o produto de uma matriz por um vetor, para o cálculo eficiente de produto de matrizes, da exponencial, seno e co-seno de uma matriz, da construção rápida e iterativa da inversa de uma

matriz, etc. O método é também aplicado na representação explícita dos operadores diferenciais, das derivadas fraccionárias, bem como da transformada de Hilbert.

A utilização de ôndulas bi-ortogonais no algoritmo BCR é estudada em [Kei94].

O artigo [FM97] é um exemplo do estudo de um algoritmo paralelo para a forma standard e não-standard de operadores.

Em [GBD98] os autores introduzem um método directo para resolver sistemas de equações lineares e construção da inversa usando a decomposição LU da forma não-standard para uma certa classe de matrizes.

As primeiras aplicações do algoritmo BCR na resolução de equações diferenciais surgem nos artigos [BMP92], [Bey94] e [BK97].

A Química – nomeadamente a Química Quântica – é uma das áreas onde têm surgido aplicações importantes das ideias introduzidas por Beylkin, Coifman e Rohklin; vejam-se, por exemplo, os artigos [FD98], [Fis00] e, mais recentemente, [ABC<sup>+</sup>03], [BYF<sup>+</sup>03], [HFBY03], [BFHJ04], [BYF<sup>+</sup>04], [FHB05], [BM05] e [Den05]. Para estes últimos desenvolvimentos foi fundamental a possibilidade de tratar problemas de dimensões elevadas; para tal, pode considerar-se que o artigo de [Alp93], com a introdução de novas bases de “multi-wavelets”, foi uma peça essencial. O tema da computação em dimensões elevadas continua a merecer a atenção dos investigadores, como comprovam as recentes publicações já referidas, mas também os artigos de [BM02] e [HFG<sup>+</sup>05]. De referir que em [FHB05] é descrito um pacote de *software* – MADNESS (Multiresolution ADaptive NumErical Scientific Simulation) – especialmente desenvolvido para a representação de funções e operadores em base de “multiwavelets” e implementado para uma, duas, três e seis dimensões.

Uma das áreas onde o uso de ôndulas e, de certo modo, ainda que indirectamente, a ideia da representação de operadores em bases dessas funções, impulsionada pelo algoritmo BCR, se tem manifestado particularmente promiss-

sora é a do tratamento numérico de equações de derivadas parciais; vejamos, por exemplo, os artigos [BMR94],[HYS94], [DPS93, DPS94a, DPS94b, DPS94c], [KRS96],[DKU96], [FS97], [ABCI98], [CDD01, CDD02],[BBC<sup>+</sup>01], [ABGV02], [DDU02], entre muitos outros; a este propósito, não podemos deixar de referir o excelente artigo de Dahmen [Dah01], onde é feito um *survey* muito completo da utilização de ôndulas (na sua acepção mais geral) na resolução numérica de equações de derivadas parciais.

É precisamente nesta fascinante área de aplicação da teoria das ôndulas que estamos particularmente interessados e vocacionados para enveredar em trabalhos futuros.

# Bibliografia

- [ABC<sup>+</sup>03] A. Averbuch, G. Beylkin, R. Coifman, P. Fischer e M. Israeli. Adaptative solution of multidimensional PDEs via tensor product wavelet decomposition, 2003. (submetido)  
URL: <http://www.cs.tau.ac.il/~amir1/PS/poisson.pdf>.
- [ABCI98] A. Averbuch, G. Beylkin, R. Coifman e M. Israeli. Multiresolution solution of elliptic and parabolic PDEs. In Y. Zeevi e R. Coifman, editores, *Proceedings of the Samuel Neaman Workshop on Signal and Image Representations in Combined Space*, pages 341–360, Haifa, Isarel, 1998. Academic Press.
- [ABGV02] B. Alpert, G. Beylkin, D. Gines e L. Vozovoi. Adaptative solution of partial differential equations in multiwavelet bases. *J. Comp. Phys.*, 182:149–190, 2002.
- [Alp93] B. Alpert. A class of bases in  $L^2$  for the sparse representation of integral operators. *SIAM J. Math. Anal.*, 24(1):246–262, 1993.
- [BBC<sup>+</sup>01] A. Barinka, T. Barsch, P. Charton, A. Cohen, S. Dahlke, W. Dahmen e K. Urban. Adaptive wavelet schemes for elliptic problems – implementation and numerical experiments. *SIAM J. Sci. Comput.*, 23(3):910–939 (electronic), 2001.
- [BCR91] G. Beylkin, R. R. Coifman e V. Rokhlin. Fast wavelet transforms and numerical algorithms I. *Comm. Pure and Appl.*

- Math.*, 44:141–183, 1991. Yale University Technical Report YALEU/DCS/RR-696, August 1989.
- [BCR92] G. Beylkin, R. R. Coifman e V. Rokhlin. Wavelets in Numerical Analysis. In *Wavelets and Their Applications*, pages 181–210. Jones and Bartlett, 1992.
  - [Bey91] G. Beylkin. Wavelets, multiresolution analysis and fast numerical algorithms. *A draft of INRIA Lecture Notes*, 1991.
  - [Bey92] G. Beylkin. On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29(6):1716–1740, 1992.
  - [Bey93] G. Beylkin. Wavelets and fast numerical algorithms. In I. Daubechies, editor, *Different Perspectives on Wavelets*, pages 89–117. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1993.
  - [Bey94] G. Beylkin. On wavelet-based algorithms for solving differential equations. In John J. Benedetto e Michael W. Frazier, editores, *Wavelets: Mathematics and Applications*, pages 449–466. CRC Press, 1994.
  - [BFHJ04] G. Beylkin, G. Fann, R. Harrison e K. Jordan. Singular operators in multiwavelet bases. *IBM J. Res. & Dev.*, 48(2):161–171, 2004.
  - [BK97] G. Beylkin e J. Keiser. On the adaptative numerical solution of nonlinear partial differential equations in wavelet bases. *J. Comp. Phys.*, 132:233–259, 1997.
  - [BM02] G. Beylkin e M.J. Mohlenkamp. Numerical operator calculus in higher dimensions. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 99(16):10246–10251, 2002.

- [BM05] G. Beylkin e M.J. Mohlenkamp. Algorithms for numerical analysis in high dimensions. *SIAM J. Sci. Comput.*, 26(6):2133–2159, 2005.
- [BMP92] E. Bacry, S. Mallat e G. Papanicolaou. A wavelet based space-time adaptative numerical method for partial differential equations. *Math. Model. Numer. Anal.*, 26(7):793, 1992.
- [BMR94] S. Bertoluzza, Y. Maday e J. C. Ravel. A dinamically adaptive wavelet method for solving partial differential equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 116:293–299, 1994.
- [BYF<sup>+</sup>03] G. Beylkin, T. Yanai, G. Fann, Z. Gan e R. Harrison. Multiresolution quantum chemistry in multiwavelet bases. In P.M.A. Sloot et. al., editor, *Lecture Notes in Computer Science. Computational Science - ICCS 2003*, volume 2660, pages 103–110. 2003.
- [BYF<sup>+</sup>04] G. Beylkin, T. Yanai, G. Fann, Z. Gan e R. Harrison. Multiresolution quantum chemistry: basic theory and initial applications. *J. Chem. Phys.*, 121(23):11587–11598, 2004.
- [CDD01] A. Cohen, W. Dahmen e R. DeVore. Adaptive wavelet methods for elliptic operator equations - convergence rates. *Math. Comput.*, 70(233):27–75, 2001.
- [CDD02] A. Cohen, W. Dahmen e R. DeVore. Adaptive wavelet methods II - Beyond the elliptic case. *Found. Comput. Math.*, (2):203, 2002.
- [CDV93] A. Cohen, I. Daubechies e P. Vial. Wavelts e fast wavelet transforms on an interval. *Appl. Comp. Harmon. Anal.*, 1:54–81, 1993.
- [Dah01] W. Dahmen. Wavelet methods for PDEs - some recent developments. *J. Comput. Appl. Math.*, 128:133–185, 2001.



- [Dau88] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 41:909–996, 1988.
- [Dau92] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*, volume 61 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, 1992.
- [Dau93] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets II: variations on a theme. *SIAM J. Math. Anal.*, 24(2):499–519, 1993.
- [Dau96] I. Daubechies. Where do wavelets come from? – A personal point of view. In *Proceedings of the IEEE Special Issue on Wavelets*, volume 84, pages 510–513, 1996.
- [DDU02] S. Dahlke, W. Dahmen e K. Urban. Adaptive wavelet methods for saddle point problems - convergence rates. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40(4):1230–1262, 2002.
- [Den05] H. Deng. Fast solution of electromagnetic integral equations using BCR non-standard wavelet decomposition. In *PIERS 2005*, 2005.
- [DKU96] W. Dahmen, A. Kunoth e K. Urban. A wavelet Galerkin method for the Stokes equations. *Computing*, 56(3):259–301, 1996.
- [DM72] H. Dym e H. P. McKean. *Fourier Series and Integrals*. Academic Press, New York, 1972.
- [DPS93] W. Dahmen, S. Proessdorf e R. Schneider. Wavelet aproximation methods for pseudo-differential equations II: Matrix compression and fast solution. *Adv. Comput. Math.*, (1):259–335, 1993.
- [DPS94a] W. Dahmen, S. Proessdorf e R. Schneider. Multiscale methods for pseudo-differential equations. In L. Schumaker e G. Webb,

- editores, *Recent Advances in Wavelet Analysis*, volume 3, pages 191–235. 1994.
- [DPS94b] W. Dahmen, S. Proessdorf e R. Schneider. Multiscale methods for pseudo-differential equations on smooth manifolds. In Montefusco L. Chui, C. K. e L. Puccio, editores, *Wavelets: Theory, Algorithms e Applications*, pages 1–40. 1994.
- [DPS94c] W. Dahmen, S. Proessdorf e R. Schneider. Wavelet approximation methods for pseudo-differential equations I: Stability and convergence. *Math. Z.*, (215):583–620, 1994.
- [FD98] P. Fischer e M. Defranceschi. Numerical solution of the Schrödinger equation in a wavelet bases for hydrogen-like atoms. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35(1):1–12, 1998.
- [FHB05] G. Fann, R. Harrison e G. Beylkin. MRA and low-separation rank approximation with applications to quantum electronics structures computations. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 16:461–465, 2005.
- [Fis00] P. Fischer. Numerical solution of eigenvalue problems by means of a wavelet-based Lanczos decomposition. *Int. J. Quant. Chem.*, 77:552–, 2000.
- [FM97] J. Fridman e E. S. Manolakos. On the scalability of 2-D discrete wavelet transform algorithms. *Multidimens. Syst. Signal Process.*, (8):185–218, 1997.
- [FS97] J. Fröhlich e K. Schneider. An adaptative Wavelet-Vaguelette algorithm for the solution of PDEs. *J. Comput. Phys.*, 130:174–190, 1997.

- [GBD98] D. Gines, G. Beylkin e J. Dunn. LU factorization of non-standard forms and direct multiresolution solvers. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, (5):129–155, 1998.
- [HFBY03] R. J. Harrison, G. Fann, G. Beylkin e T. Yanai. Multiresolution Quantum Chemistry: basic theory and applications. Technical report, Computer Science and Mathematics Division, Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, TN, 2003.
- [HFG<sup>+</sup>05] R. Harrison, G. Fann, Z. Gan, T. Yanai, S. Sugiki, A. Beste e G. Beylkin. Multiresolution computational chemistry. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 16:243–246, 2005.
- [HYS94] A. Harten e I. Yad-Shalom. Fast multiresolution algorithms for matrix-vector multiplication. *SIAM J. Numer. Anal.*, (31):1191–1218, 1994.
- [Kei94] F. Keinert. Biorthogonal wavelets for fast matrix computations. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 1:147–156, 1994.
- [Kei04] F. Keinert. *Wavelets and Multiwavelets*. Chapman & Hall, Boca Raton, Florida, 2004.
- [Koo93a] T. H. Koornwinder. Fast wavelet transforms and Calderón-Zygmund operators. In T. H. Koornwinder, editor, *Wavelets: An Elementary Treatment of Theory and Applications*, volume 1 of *Approximations and Decompositions*, pages 161–182. World Scientific, Singapore, 1993.
- [Koo93b] T. H. Koornwinder, editor. *Wavelets: An Elementary Treatment of Theory and Applications*, volume 1 of *Approximations and Decompositions*. World Scientific, Singapore, 1993.

- [Kre78] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [KRS96] B. Kleemann, A. Rathsfeld e R. Schneider. Multiscale methods for boundary integral equations and their application to boundary value problems in scattering theory and geodesy, 1996. URL: [citeseer.csail.mit.edu/kleemann96multiscale.html](http://citeseer.csail.mit.edu/kleemann96multiscale.html).
- [LMR97] A. K. Louis, P. Maass e A. Rieder. *Wavelets: Theory and Applications*. John Wiley & Sons, Chichester, 1997.
- [Mal89] S. Mallat. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of  $L^2(\mathbb{R})$ . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 315:69–87, September 1989.
- [Mal98] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, New York, 1998.
- [Mat] The Math Works, Inc., Natick, MA. *Wavelet Toolbox User's Guide*. URL: [www.mathworks.com/products/wavelet](http://www.mathworks.com/products/wavelet).
- [Mey91] Y. Meyer. Ondelletes sur l'intervalle. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 7:115–143, 1991.
- [Oja98] H. Ojanen. Wavekit: A Wavelet Toolbox for Matlab - user's guide, 1998. URL: [www.math.rutgers.edu/~ojanen/wavekit](http://www.math.rutgers.edu/~ojanen/wavekit).
- [Rud74] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1974.
- [SN96] G. Strang e T. Nguyen. *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley-Cambridge Press, Massachusetts, 1996.
- [Soa02] M. J. Soares. *Teoria de Ondulas*. Departamento de Matemática, Universidade do Minho, 2002.

- [SP94] W. Sweldens e R. Piessens. Quadrature formulae and asymptotic error expansions for wavelet approximation of smooth functions. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31(4):1240–1264, 1994.
- [Wal01] D. Walnut. *An Introduction to Wavelet Analysis*. Birkhäuser, Boston, 2001.
- [Woj97] P. Wojtaszczyk. *A Mathematical Introduction to Wavelets*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

# Apêndice A

## Rotinas em MATLAB

```
----- Função stnst.m -----  
  
function [erro,taxaC,tempo]=stnst(forma,J,k,ond,tol)  
% STNST calcula forma standard/nao standard de uma matriz, comprime,  
% multiplica-a por um vector aleatorio; calcula erro, taxa de  
% compressao e tempos de CPU; esta funcao invoca a funcao  
% EXEMPLOS_MATRIZES  
%  
% [ERRO,TAXAC,TEMPO]=STNST(FORMA,J,K,OND,TOL)  
%  
% PARAMETROS DE ENTRADA:  
% FORMA indica qual a forma pretendida:  
% FORMA='s' para a forma standard  
% FORMA='ns' para forma nao-standard  
% J 2^J = dimensao da matriz original  
% K K=1,..., 6 determina escolha da matriz inicial  
% (Exemplos 1 a 6 considerados na tese)  
% OND nome da ondula utilizada (nomenclatura da Wavelet Toolbox).  
% Ex: 'db6' a  
% TOL tolerancia para a compressao  
%
```

```

% PARAMETROS DE SAIDA:
%   ERRO      erro relativo medido na norma l2 (quociente entre a norma da
%             diferenca entre vector exacto e aproximado e norma do vector
%             exacto)
%   TAXAC     taxa de compressao da forma standard ou nao-standard (quociente
%             entre  $N^2$  ( $N=2^J$ ) e numero de elementos de valor
%             absoluto superior a  $m*TOL$ , onde  $m$ =maximo dos
%             valores absolutos dos elementos da matriz)
%   TEMPO     tempo de CPU gasto na determinacao da forma matricial standard
%             ou nao-standard
%
% Sao ainda geradas as seguintes figuras:
%
%   * figura da forma matricial nao-standard ou standard
%     (conforme a escolha do input FORMA). Aparecem a negro as entradas
%     cujos valores absolutos sejam superiores a  $m*TOL$ , a branco as
%     inferiores;
%   * grafico do vector (aleatorio) inicial;
%   * grafico do vector (exacto) resultante da multiplicacao da matriz
%     inicial pelo vector inicial;
%   * grafico do vector (aproximado) resultante do uso da forma standard
%     ou nao-standard comprimida.
%
%
%    $N=2^J$ ; % Dimensao da matriz inicial
%
% ESCOLHA DA MATRIZ INICIAL, usando a funcao EXEMPLOS_MATRIZES
%   A=exemplos_matrizes(k,N);
% CRIACAO DE UM VECTOR ALEATORIO X de dimensao  $N=2^J$ 
%   x = rand(N,1);

```

```

% CALCULO DO PRODUTO NORMAL
    produto=A*x;
% USO DE ONDULAS PERIODIZADAS (usando funcao DWTMODE da Wavelet Toolbox)
    dwtmode('per');
% ESCOLHA DO CASO STANDARD OU NAO STANDARD, CONFORME VALOR DE FORMA
    switch forma
        case 'ns'
%-----
%-----
%
%                                CASO DA FORMA NAO-STANDARD
%-----
%-----
% DETERMINACAO DA FORMA NAO-STANDARD DA MATRIZ (com contagem de tempo)
% Usa as funcoes WAVEDEC2, DETCOEF2 e APPCOEF2 da Wavelet Toolbox
    t=cputime;    % Inicializacao da contagem do tempo
    [C,S]=wavedec2(A,J,ond);
    matrizns=[];
    for i=1:J
        beta=detcoef2('h',C,S,i);
        alfa=detcoef2('d',C,S,i);
        gama=detcoef2('v',C,S,i);
        bloco=[zeros(N/2^i),gama;beta,alfa];
        matrizns=blkdiag(bloco,matrizns);
    end
    matrizns(1,1)=appcoef2(C,S,ond,J);
    tempo =cputime-t;          % Tempo gasto na determinacao da
                                % forma nao-standard
% PROCESSO DE COMPRESSAO
    M=max(max(abs(matrizns)));
    k=find(abs(matrizns)<(M*tol));

```



```

matrizns(k)=0;

% DETERMINACAO DA TAXA DE COMPRESSAO
    todos=(2*N-2)*(2*N-2);
    nulos=length(k);
    naonulos=todos-nulos;
    taxaC=N^2/naonulos;

% DETERMINACAO DA FORMA NAO-STANDARD DE X
    nsx=[];
    CA=x;
    for i=1:J
        [CA,CD]=dwt(CA,ond);
        nsx=[CA;CD;nsx];
    end

% MULTIPLICACAO DA MATRIZ NAO-STANDARD COMPRIMIDA PELA FORMA NS DE X
    xtrans=(matrizns*nsx)';

% TRANSFORMADA INVERSA DO VECTOR RESULTANTE DA MULTIPLICACAO
    C=idwt(xtrans(1),xtrans(2),ond);
    xtrans(1:2)=[];
    for i=2:J
        m=2^(i-1);
        C=C+xtrans(1:m);
        C=idwt(C,xtrans(m+1:2*m),ond);
        comprimento=length(C);
        xtrans(1:comprimento)=[];
    end

% CALCULO DO ERRO
    produtos=C';
    vector_erro=produto-produtos;
    erro=norm(vector_erro)/norm(produto);

```

```

% -----
%                                     GRAFICOS
% -----
% Esboco do grafico da matriz comprimida (a preto e branco)
    l=find(abs(matrizns)>0);
    matrizns(l)=1;
    figure('name','Multiplicacao rapida de uma matriz por um vector',...
        'NumberTitle','off','Units',...
        'normalized','Position',[0.1,0.15,0.8,0.7])
    subplot(4,2,[1 3 5 7])
    map=[1 1 1; 0 0 0];
    colormap(map);
    imagesc(matrizns);
    axis tight
    axis square
    title('Matriz na forma nao-standard')
% Graficos dos vectores e erro
    subplot(4,2,2)
    plot(x)
    axis tight
    title('Vector original')
    subplot(4,2,4)
    plot(produto)
    axis tight
    title('Produto exacto')
    subplot(4,2,6)
    plot(produtons)
    axis tight
    title('Produto aproximado')
    subplot(4,2,8)

```

```

plot(vector_erro)
axis tight
title(['Erro relativo: ',num2str(erro)])
%-----
%-----
%
%                CASO DA FORMA STANDARD
%-----
%-----

case 's'
% DETERMINACAO DA FORMA STANDARD DA MATRIZ E DO TEMPO GASTO
t=cputime;
[C,S]=wavedec2(A,J,ond);
matrizs=zeros(N);
for i=1:J
    beta=detcoef2('h',C,S,i);
    alfa=detcoef2('d',C,S,i);
    gama=detcoef2('v',C,S,i);
    if length(beta)>=2,
        for r=1:length(beta)
            [B1,S1]=wavedec(beta(r,:),J-i,ond);
            [G2,S2]=wavedec(gama(:,r),J-i,ond);
            B(r,:)=B1;
            G(:,r)=G2;
        end
        matrizs(length(alfa)+1:2*length(alfa),1:2*length(alfa))=[B,alfa];
        matrizs(1:length(alfa),length(alfa)+1:2*length(alfa))=G;
    end
    clear B G
end
bloco=[zeros(N/2^i),gama;beta,alfa];

```

```

    matrizs(1:2*length(alfa),1:2*length(alfa))=bloco;
    matrizs(1,1)=appcoef2(C,S,ond,J);
    tempo=cputime-t;      % Tempo gasto na determinacao da forma standard
% PROCESSO DE COMPRESSAO
    M=max(max(abs(matrizs)));
    k=find(abs(matrizs)<(M*tol));
    matrizs(k)=0;
% DETERMINACAO DA TAXA DE COMPRESSAO
    todos=N^2;
    nulos=length(k);
    naonulos=todos-nulos;
    taxaC=todos/naonulos;
% DETERMINACAO DA FORMA STANDARD DE X
    [C,L]=wavedec(x,J,ond);
    p=L;
    sx=C;
% PRODUTO USANDO A MATRIZ STANDARD COMPRIMIDA
    xtrans=(matrizs*sx)';
% TRANSFORMADA INVERSA DO VECTOR RESULTANTE DO PRODUTO
    C=waverec(xtrans,p,ond);
% CALCULO DO ERRO
    produtoS=C';
    vector_erro=produto-produtoS;
    erro=norm(vector_erro)/norm(produto);

% -----
%                                     GRAFICOS
% -----

% Esboco do grafico da matriz comprimida (a preto e branco)
    l=find(abs(matrizs)>0);
    matrizs(l)=1;

```

```

figure('name','Multiplicacao rapida de uma matriz por um vector',...
      'NumberTitle','off','Units',...
      'normalized','Position',[0.1,0.15,0.8,0.7])
subplot(4,2,[1 3 5 7])
map=[1 1 1;0 0 0];
colormap(map);
imagesc(matrizs);
axis tight
axis square
title('Matriz na forma standard')
% Graficos dos vectores e erro
subplot(4,2,2)
plot(x)
axis tight
title('Vector original')
subplot(4,2,4)
plot(produto)
axis tight
title('Produto exacto')
subplot(4,2,6)
plot(produtos)
axis tight
title('Produto aproximado')
subplot(4,2,8)
plot(vector_erro)
axis tight
title(['Erro relativo: ',num2str(erro)])
otherwise %Fim de switch FORMA
    error('forma deve ser ns (forma nao-standard) ou s(forma standard)')
end

```

```

----- Função exemplos_matrizes.m -----

function matriz = exemplos_matrizes(k,dim)

% EXEMPLOS_MATRIZES -- exemplos para a matriz do operador da função STNST
%
% [MATRIZ] = EXEMPLOS_MATRIZES(K,DIM)
%
%   valor de k      Operador
%   1              Exemplo 1 de BCR
%   2              Exemplo 2 de BCR
%   3              Exemplo de Wavekit
%   4              Exemplo 5 de BCR
%   5              Exemplo 6 de BCR
%   6              Exemplo do livro D. Walnut
%
% PARAMETROS DE ENTRADA:
%   K: escolha do operador
%   DIM: a dimensão da matriz do operador
%
%
% PARAMETRO DE SAIDA:
%   MATRIZ: matriz do operador escolhido

%-----
%-----
%
%               CALCULO DE MATRIZ
%-----
%-----

```

```

switch k
case 1 % Exemplo 1 de BCR
    for i=1:dim
        for j=1:dim
            if i~=j
                matriz(i,j)=1/(i-j);
            else
                matriz(i,j)=0;
            end
        end
    end
end

case 2 % Exemplo 2 de BCR
    for i=1:dim
        for j=1:dim
            if (i~=j&i~=dim/2&j~=dim/2)
                matriz(i,j)=(log(abs(i-dim/2))-log(abs(j-dim/2)))/(i-j);
            else
                matriz(i,j)=0;
            end
        end
    end
end

case 3 % Exemplo de Wavekit
    for i=1:dim
        for j=1:dim
            if (i~=j)
                matriz(i,j)=cot(pi*(i-j)/dim);
            else
                matriz(i,j)=0;
            end
        end
    end
end

```

```

        end
    end
end

case 4 % Exemplo 5 de BCR
    for i=1:dim
        for j=1:dim
            if i~=j
                matriz(i,j)=1/((i-j)+0.5*cos(i*j));
            else
                matriz(i,j)=0;
            end
        end
    end
end

case 5 % Exemplo 6 de BCR
    for i=1:dim
        for j=1:dim
            if i~=j
                matriz(i,j)=(i*cos(log(i^2))-j*cos(log(j^2)))/((i-j)^2);
            else
                matriz(i,j)=0;
            end
        end
    end
end

case 6 % Exemplo do livro D. Walnut
    matriz=zeros(dim,dim);
    for i=1:dim
        for j=1:dim

```



```

        im=(i)/dim;
        jm=(j)/dim;
        if im>jm
            matriz(i,j)=(sin(im-1)*sin(jm))/(sin(1));
        else
            matriz(i,j)=(sin(im)*sin(jm-1))/(sin(1));
        end
    end
end

otherwise
    error('k deve estar entre 1 e 8')
end

```